



**UNIVERSITA' DEL SALENTO**

**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA**

---

**TESI DI LAUREA**

**IN**

**MECCANICA DEL VEICOLO**

**DINAMICA VERTICALE DEL VEICOLO STRADALE**

**RELATORI:**

Prof. Ing. Arcangelo MESSINA

Ing. Giulio REINA

**LAUREANDO:**

Antonio Schirinzi

**Anno Accademico 2012/2013**

## RINGRAZIAMENTI

Al termine di questo lavoro di tesi, vorrei ringraziare tutti coloro che, con il loro prezioso contributo, mi hanno permesso di raggiungere questo obiettivo.

Un ringraziamento va innanzitutto al mio relatore Ing. Giulio Reina per aver creduto nelle mie capacità e per avermi assegnato tale lavoro di tesi che ho portato a termine con grande passione. Inoltre vorrei ringraziarlo per la sua infinita disponibilità e i suoi validi suggerimenti.

Vorrei ringraziare anche il Prof. Ing. Arcangelo Messina per avermi dato validi consigli e per avermi dato la possibilità di utilizzare tutti gli strumenti necessari per lo svolgimento della tesi.

Ringrazio l'Ing. Luigi Spedicato per essersi reso sempre disponibile nel Laboratorio di Meccanica Applicata dandomi consigli e aiutandomi nei momenti di difficoltà.

Infine un ringraziamento va alla mia famiglia per avermi supportato in tutti questi anni di studio sia moralmente che economicamente.

*Alla mia famiglia*

<b>PREMESSA .....</b>	<b>5</b>
<b>1. INTRODUZIONE.....</b>	<b>7</b>
1.1 CARATTERISTICHE DI GUIDA DEL VEICOLO .....	7
1.2 RISPOSTA UMANA ALLE VIBRAZIONI .....	7
1.3 COMFORT DI MARCIA E TENUTA DI STRADA .....	11
<b>2. ANALISI DELLE CARATTERISTICHE DI UN VEICOLO STRADALE .....</b>	<b>13</b>
2.1 MODELLI DI VEICOLI STRADALI .....	13
2.2 MODELLO DI ¼ DI VEICOLO A DUE GRADI DI LIBERTA' .....	15
2.2.1 <i>Determinazione analitica delle frequenze naturali del modello di veicolo.....</i>	<i>17</i>
2.3 ANALISI IN FREQUENZA DEL MODELLO DI ¼ DI VEICOLO IN AMBIENTE MATLAB .....	19
2.3.1 <i>Caratteristiche degli pneumatici.....</i>	<i>20</i>
2.3.2 <i>Vibration Isolation.....</i>	<i>26</i>
2.3.3 <i>Suspension Travel.....</i>	<i>38</i>
2.3.4 <i>Roadholding.....</i>	<i>48</i>
2.3.5 <i>Analisi in frequenza dell'accelerazione della massa sospesa.....</i>	<i>58</i>
<b>3. MODELLO DI ¼ DI VEICOLO IN AMBIENTE MSC ADAMS .....</b>	<b>64</b>
3.1 INTRODUZIONE SOFTWARE MSC ADAMS.....	64
3.2 REALIZZAZIONE E STUDIO DEL MODELLO IN MSC ADAMS .....	65
3.3 TIPOLOGIA DI PNEUMATICI .....	66
3.4 VERIFICA STATICA .....	70
3.5 VIBRATION ISOLATION .....	73
3.6 TRASMISSIBILITA' CON UN PROFILO STRADALE SINUSOIDALE .....	82
3.7 COMPORTAMENTO DELLA MASSA SOSPESA CON UN PROFILO STRADALE DI TIPO GRADINO ..	93
3.8 COMPORTAMENTO DELLA MASSA SOSPESA CON UN PROFILO STRADALE DI TIPO PLANK.....	99
3.9 COMPORTAMENTO DELLA MASSA SOSPESA CON UN PROFILO STRADALE DI TIPO ROOF .....	104
<b>4. CONCLUSIONI .....</b>	<b>110</b>
<b>5. BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>112</b>
<b>6. APPENDICE A .....</b>	<b>113</b>
6.1 VIBRATION ISOLATION AL VARIARE DEL RAPPORTO DELLE MASSE CON E SENZA SMORZAMENTO DELLO PNEUMATICO .....	113
6.2 VIBRATION ISOLATION AL VARIARE DEL RAPPORTO DELLE RIGIDENZE CON E SENZA SMORZAMENTO DELLO PNEUMATICO .....	115
6.3 VIBRATION ISOLATION AL VARIARE DEL RAPPORTO DI SMORZAMENTO DEL SISTEMA SOSPENSIVO CON E SENZA SMORZAMENTO DELLO PNEUMATICO .....	117

6.4	VIBRATION ISOLATION AL VARIARE DELLA PRESSIONE DÌ GONFIAGGIO CON E SENZA SMORZAMENTO DELLO PNEUMATICO .....	119
<b>7.</b>	<b>APPENDICE B .....</b>	<b>121</b>
7.1	TRASMISSIBILITA' IN TERMINI DI ACCELERAZIONE AL VARIARE DEL RAPPORTO DELLE DUE MASSE .....	121
7.2	TRASMISSIBILITA' IN TERMINI DI ACCELERAZIONE AL VARIARE DEL RAPPORTO DELLE RIGIDENZE.....	122
7.3	TRASMISSIBILITA' IN TERMINI DI ACCELERAZIONE AL VARIARE DELLO SMORZAMENTO DEL SISTEMA SOSPENSIVO .....	124
7.4	TRASMISSIBILITA' IN TERMINI DI ACCELERAZIONE AL VARIARE DELLA PRESSIONE .....	125
<b>8.</b>	<b>APPENDICE C .....</b>	<b>127</b>
8.1	TRASMISSIBILITA' CON UN PROFILO STRADALE SINUSOIDALE .....	127
8.2	COMPORTAMENTO DELLA MASSA SOSPESA CON UN PROFILO STRADALE DI TIPO GRADINO, PLANK E ROOF .....	129

## PREMESSA

Il moto verticale di un veicolo causato dall'irregolarità della strada e dalle caratteristiche del pacchetto sospensione-pneumatico è un fattore importante nel progetto di un veicolo per valutarne le prestazioni in termini di comfort e tenuta di strada. La presente attività di tesi di laurea si pone come obiettivo quello di studiare la dinamica verticale di un veicolo stradale.

Tale studio dovrebbe comprendere idealmente il moto di rollio e di beccheggio insieme a quello verticale (detto anche di "pompaggio"). Tuttavia, può essere mostrato che l'accoppiamento tra il moto di rollio e quello di pompaggio non è significativo per le normali autovetture di tipo "passaggero", ed è possibile far riferimento ad un modello cosiddetto ad un quarto di veicolo. Un modello ad un quarto di veicolo a due gradi di libertà considera entrambe le masse sospese e quelle non sospese connesse con l'assemblato ruota-portamozzo. Quello ad un grado di libertà trascura la presenza delle masse non sospese. Entrambi i modelli sono utili nella progettazione e controllo delle sospensioni automobilistiche. Tuttavia, quello a due gradi di libertà rappresenta un buon compromesso tra semplicità e accuratezza e sarà impiegato in questa tesi.

In particolare, lo studio ha consentito di ottenere in forma analitica il modello ad un quarto di veicolo e di implementare le equazioni relative in ambiente MATLAB R2012a.

Si è inoltre ricavata la risposta in frequenza del modello analitico di  $\frac{1}{4}$  di veicolo a due gradi di libertà andando a variare alcuni parametri come il rapporto tra la massa sospesa e quella non sospesa, il rapporto tra la rigidità del sistema sospensivo e del sistema ruota, il coefficiente di smorzamento del sistema sospensivo e dello pneumatico e infine la pressione di gonfiaggio dello pneumatico stesso. Il modello ad un quarto di veicolo è stato altresì implementato mediante il software di simulazione cineto-dinamica MSC ADAMS 2005 e si è proceduto ad un confronto con i risultati ottenuti per via analitica.

Gli argomenti trattati nel seguente lavoro di tesi sono stati suddivisi in 3 capitoli.

Nel *primo capitolo* si è effettuata una descrizione generale sulle caratteristiche di guida e di comfort del veicolo e sulla risposta umana alle vibrazioni.

Nel *secondo capitolo* si è descritto lo studio del modello di  $\frac{1}{4}$  di veicolo, in ambiente MATLAB, ricavando l'analisi in frequenza relativa ai tre casi fondamentali come il vibration isolation, suspension travel e roadholding. Inoltre prevede l'analisi in frequenza delle accelerazioni della massa sospesa in uscita del sistema.

Nel *terzo capitolo* si è effettuato lo studio del modello cineto-dinamico di  $\frac{1}{4}$  di veicolo in ambiente MSC ADAMS, ricavando l'analisi in frequenza nei tre casi descritti nel capitolo precedente e inoltre si è eseguito l'analisi del modello quando quest'ultimo è sottoposto ad un ingresso di tipo sinusoidale, gradino, plank e roof. Infine si sono confrontati i risultati ottenuti nei due ambienti di lavoro.

# 1. Introduzione

## *1.1 Caratteristiche di guida del veicolo*

La qualità di guida può essere determinata dalla sensazione o il feeling del passeggero all'interno di un veicolo che è in movimento. I principali problemi del comfort di guida derivano dalle vibrazioni della struttura del veicolo, le quali possono essere indotte da una varietà di fonti, come le irregolarità della superficie stradale, le forze aerodinamiche, le vibrazioni del motore e della trasmissione del moto, e la non uniformità del sistema pneumatico-ruota.

Di solito, le irregolarità di superficie, che vanno dalle buche alle variazioni random del profilo di superficie stradale, agiscono come la principale fonte che eccita la vibrazione della struttura del veicolo attraverso il sistema pneumatico-ruota e il sistema sospensivo. Le eccitazioni indotte dalle forze aerodinamiche sono applicate direttamente alla struttura del veicolo. Le eccitazioni che provengono dalle variazioni di massa e rigidità del sistema pneumatico-ruota sono trasmesse alla struttura del veicolo attraverso la sospensione.

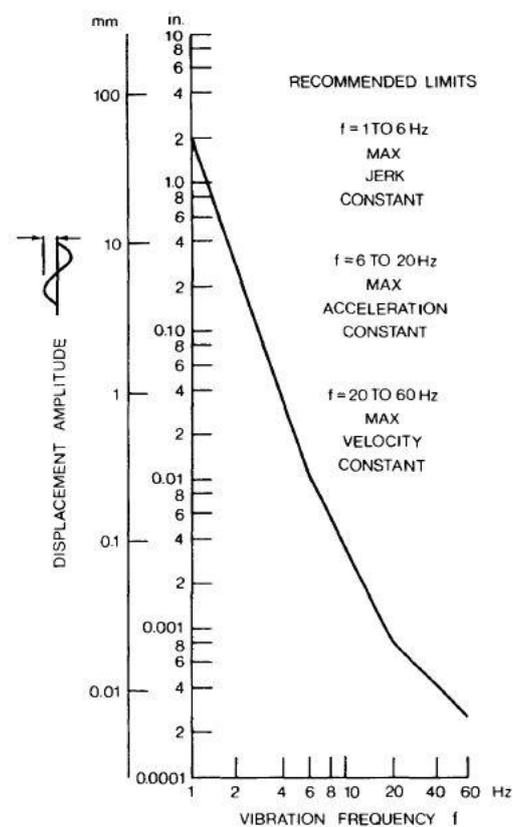
L'obiettivo dello studio della guida del veicolo è quello di fornire i principi di guida per il controllo della vibrazione del veicolo stesso tale che la sensazione di scomfort del passeggero non superi un certo livello limite. Per raggiungere tale obiettivo, è essenziale avere una buona conoscenza della risposta umana alla vibrazione, del comportamento vibrazionale del veicolo, e delle caratteristiche di irregolarità di superficie [1].

## *1.2 Risposta umana alla vibrazione*

Una considerevole ricerca è stata condotta da un numero di investigatori nel tentativo di definire i limiti del comfort di guida. Una varietà di metodi per valutare la tolleranza umana alla vibrazione sono stati sviluppati negli anni:

- Subjective Ride Measurement;
- Snake Table Tests;
- Ride Simulator Tests;
- Ride Measurements in Vehicle.

La valutazione della risposta umana alla vibrazione è complessa a tal punto che i risultati sono influenzati dalle variazioni di sensibilità individuale e dai metodi usati dai differenti investigatori. Negli anni numerosi criteri di comfort di guida sono stati proposti. La Figura 1 mostra uno dei criteri per la vibrazione verticale descritto nel *Ride and Vibration Data Manual J6a* della Society of Automotive Engineers [2].



**Figura 1:** Limiti della vibrazione verticale per il comfort dei passeggeri proposto da Janeway. (Riprodotta con il permesso della Society of Automotive Engineers).

I limiti raccomandati mostrati in Figura 1 sono anche riferiti al criterio Janeway's comfort il quale definisce l'ampiezza di vibrazione accettabile come una funzione di frequenza. E' possibile vedere che come la frequenza aumenta, l'ampiezza ammissibile diminuisce notevolmente.

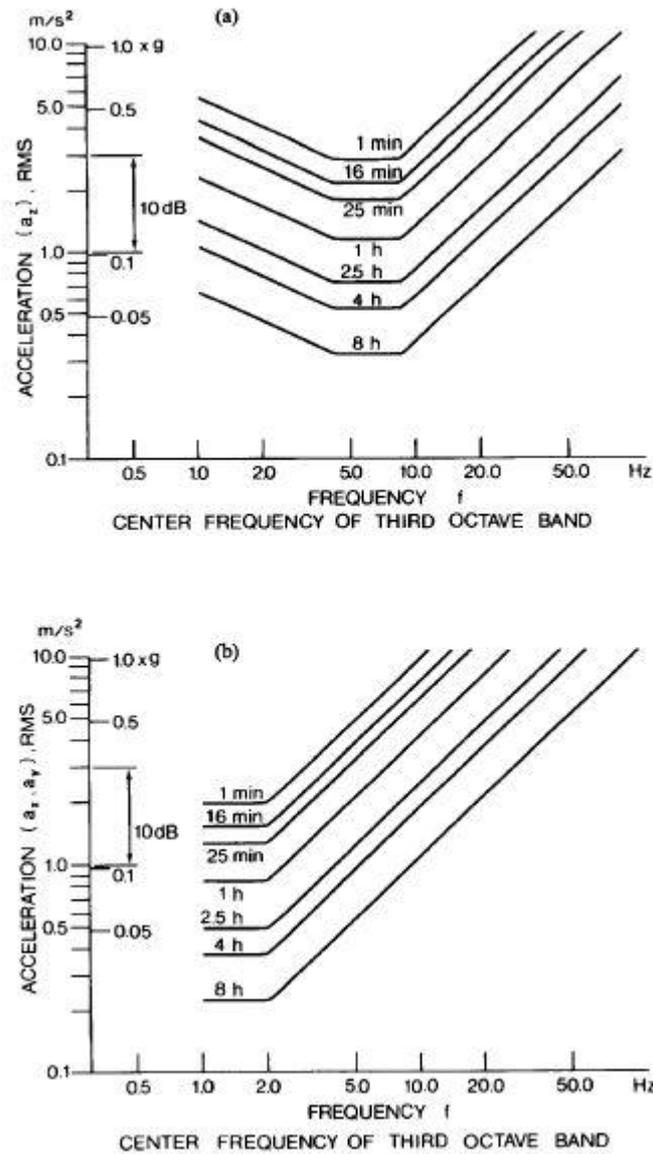
Questo criterio si basa su tre semplici relazioni, ognuna delle quali copre un certo range di frequenza, come mostrato in Figura 1. Nel range di frequenza che va da 1-6 Hz, il valore del picco, il quale è il prodotto dell'ampiezza e il cubo della pulsazione, non dovrebbe superare  $12.6 \text{ m/s}^3$ . Nel range di frequenza che va da 6-20 Hz, il picco del valore dell'accelerazione, il quale è il prodotto dell'ampiezza e il quadrato della pulsazione, dovrebbe essere minore di  $0.33 \text{ m/s}^2$ , mentre in un range di frequenza che va da 20-60 Hz, il valore di picco della velocità, il quale è il prodotto dell'ampiezza e la pulsazione, non dovrebbe superare  $2.7 \text{ mm/s}$ . Si dovrebbe notare che il criterio Janeway's comfort è basato su dati relativi alla vibrazione sinusoidale verticale di una singola frequenza. Quando due o più componenti di differenti frequenze sono presenti, non ci sono le basi per valutare l'effetto risultante [3].

Recentemente, una guida generale per definire la tolleranza umana alle vibrazioni su tutto il corpo è stata sviluppata e adottata come l'ISO 2631. Questa guida è raccomandata per la valutazione degli ambienti vibrazionali nei veicoli di trasporto così come in quelli industriali, e definisce tre distinti limiti per le vibrazioni su tutto il corpo nel range di frequenza 1-80 Hz:

1. limiti di esposizione, i quali vengono imposti per ragioni di sicurezza e che non dovrebbero essere superati senza una speciale giustificazione;
2. fatica o diminuzione dei limiti di competenza, i quali sono relativi alla conservazione dell'efficienza di lavoro e applicata a tutte le attività di guida sia di un veicolo stradale che di un trattore;

3. ridotti limiti di comfort, i quali sono caratterizzati con la conservazione del comfort e nei veicoli di trasporto sono relativi alle attività come la lettura, la scrittura e mangiare nel veicolo.

La Figura 2(a) mostra la fatica o la diminuzione dei confini di competenza per la vibrazione verticale, i quali sono definiti in termini di valori dei minimi quadrati dell'accelerazione come una funzione di frequenza. Si può vedere che come la media del tempo di esposizione aumenta, i confini diminuiscono. La fatica o diminuzione dei confini di competenza per la vibrazione laterale sono mostrati nella Figura 2(b). I limiti esposti per ragioni di sicurezza sono ottenuti aumentando la fatica o i confini di competenza diminuiti mostrati in Figura 2(a) e (b) da un fattore di 2 (6 DB più alto), mentre i confini di competenza ridotti sono ottenuti diminuendo i confini di un fattore di 3.15 (10 DB più basso) [4].



**Figura 2:** Limiti delle vibrazioni su tutto il corpo per fatica o competenza diminuita nella direzione verticale (a) e direzione trasversale (b), raccomandato dalla ISO.

### 1.3 Comfort di marcia e tenuta di strada

A causa delle inevitabili irregolarità del fondo stradale occorre dotare gli autoveicoli di sospensioni, ovvero di dispositivi di isolamento delle vibrazioni. Si cerca di garantire così un adeguato livello di comfort ai passeggeri e di mantenere le ruote in contatto con il terreno.

In genere il campo di frequenze considerato nello studio della dinamica del veicolo nel suo insieme va da 0.25 Hz a 20 Hz. Infatti, le eccitazioni a bassissime frequenze (sotto 0.25 Hz) provengono dalle naturali variazioni di pendenza della strada e il veicolo non deve fare altro che seguirle fedelmente. Per frequenze superiori a 20 Hz fino a 20000 Hz si hanno fenomeni più propriamente associabili al rumore, a causa delle diverse sensazioni indotte negli esseri umani.

Il campo 0.25-20 Hz può essere suddiviso in due sottocampi. Infatti, per frequenze inferiori a 3 Hz il contributo degli pneumatici è molto modesto e può essere trascurato (nel senso che possono essere considerati radialmente rigidi). In sintesi, l'obiettivo è quello di rendere ottimale il comportamento del veicolo anche su strada non perfettamente livellata.

Per quanto riguarda il comfort, sembra che la variabile più significativa sia l'*accelerazione verticale* della cassa, intesa sia come ampiezza che come frequenza. Infatti, le forze d'inerzia cui vengono sottoposti gli organi interni dei passeggeri sono sostanzialmente proporzionali alla accelerazione verticale, mentre i loro spostamenti relativi sono influenzati anche dalla frequenza di eccitazione.

La qualità del contatto ruota-strada può essere giudicata in base alla forza verticale scambiata in ogni istante fra terreno e pneumatico. Nel caso di oscillazioni della cassa e/o cerchione, alla forza verticale dovuta alla forza peso ed alle forze aerodinamiche viene infatti a sovrapporsi una componente fluttuante che sarebbe bene mantenere quanto più possibile limitata.

Oltre alle irregolarità del fondo stradale (*road roughness*), si hanno sorgenti di possibile eccitazione delle vibrazioni anche all'interno del veicolo stesso. Fra queste si possono citare: la non perfetta simmetria assiale delle ruote con pneumatico (eccentricità nella distribuzione della massa, delle dimensione esterne, della rigidità radiale) e lo sbilanciamento del motore e della trasmissione. In genere queste sorgenti danno luogo a eccitazioni relativamente ad alta frequenza che influenzano più l'aspetto del rumore. Sono comunque fenomeni sui quali si può intervenire in sede di progetto e di messa a punto per ridurre gli effetti [1].

## 2. Analisi delle caratteristiche di un veicolo stradale

### 2.1 Modelli di veicoli stradali

Per studiare la qualità di guida di qualsiasi veicolo stradale, sono stati adottati diversi modelli di studio. Per esempio, per una macchina da viaggio che presenta delle sospensioni anteriori indipendenti, può essere utilizzato un modello a 7 gradi di libertà come mostrato in Figura 3. In questo modello, il beccheggio, il rimbalzo e il rollio dell'intero veicolo, insieme al beccheggio delle due ruote anteriori e il beccheggio e il rollio dell'asse posteriore, sono presi in considerazione [5].

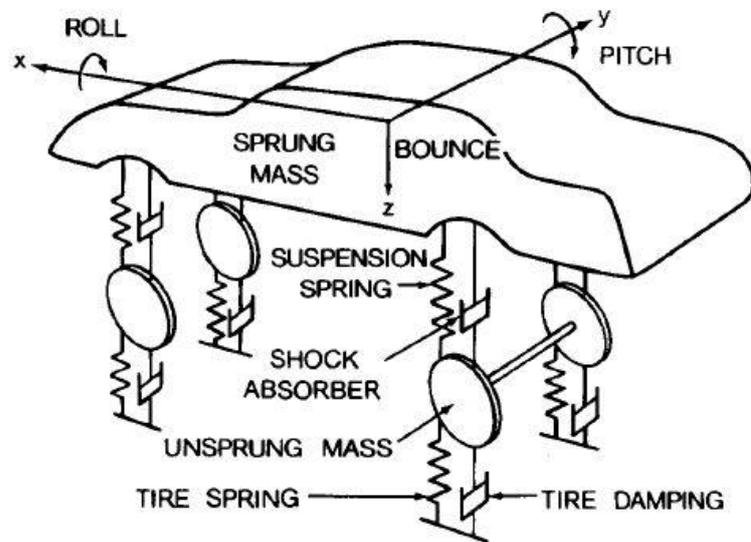
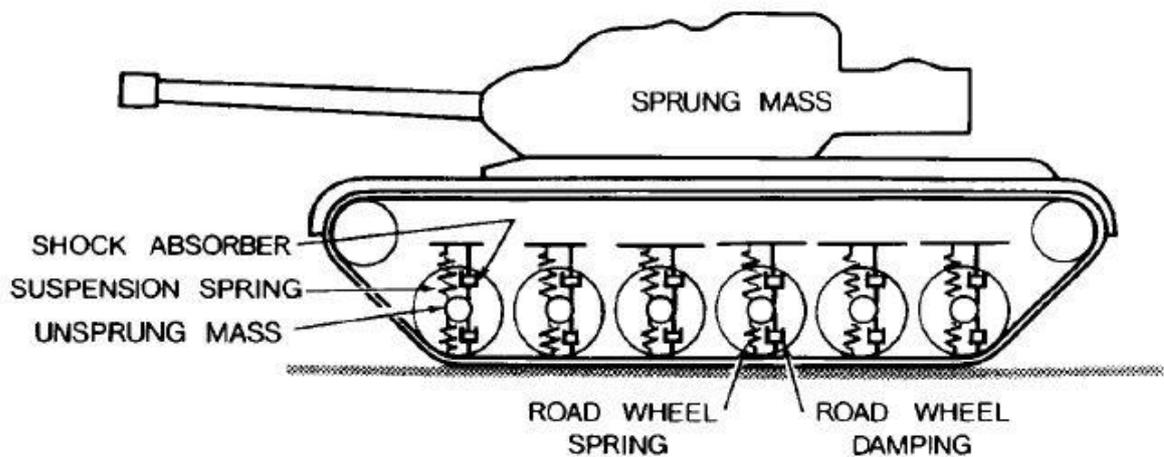


Figura 3: Modello a 7 gradi di libertà di una macchina da viaggio.

La massa della struttura del veicolo, o meglio la massa sospesa, è di solito chiamata "*Sprung Mass*", mentre la massa del sistema ruota-pneumatico e di tutti i componenti ad esso associato viene chiamata "*Unsprung Mass*".

Per un veicolo militare come mostrato in Figura 4, può essere usato un modello a 15 gradi di libertà, il quale include il beccheggio, il rimbalzo e il rollio dell'intera struttura del veicolo e anche il rimbalzo di ogni singola ruota.



**Figura 4:** Modello a 15 gradi di libertà di un veicolo militare.

Per studiare le caratteristiche vibrazionali di un veicolo, si utilizzano le equazioni del moto basate sulla seconda legge di Newton per ogni massa che deve essere formulata. Le frequenze naturali e i rapporti di ampiezza possono essere determinati considerando i principali modi di vibrare (modi normali) o le libere vibrazioni del sistema.

Quando l'eccitazione del sistema è conosciuta, la risposta può essere determinata risolvendo le equazioni del moto. Tuttavia, man mano che i gradi di libertà del sistema aumentano, l'analisi diventa sempre più complessa. In questo caso, le varie analisi e simulazioni sono state eseguite in ambiente MATLAB.

## 2.2 Modello di $\frac{1}{4}$ di veicolo a due gradi di libertà

Un veicolo rappresenta un sistema vibrazionale molto complesso con molti gradi di libertà. E' possibile, tuttavia, semplificare il sistema considerando solo alcuni suoi principali movimenti. In questo caso per fare una valutazione qualitativa sul sistema sospensivo del veicolo, in particolare gli effetti della *Sprung Mass* e della *Unsprung Mass*, della rigidità delle molle e lo smorzamento delle vibrazioni del veicolo, si è utilizzato un modello lineare a due gradi di libertà. Tale modello mostrato in Figura 5 può essere utilizzato per rappresentare  $\frac{1}{4}$  di veicolo. Esso include una *Unsprung Mass* (massa non sospesa) che rappresenta le ruote e i componenti ad esse associate e la *Sprung Mass* (massa sospesa) che rappresenta la struttura del veicolo. I loro movimenti nella direzione verticale possono essere descritti da due coordinate  $z_1$  e  $z_2$ , con l'origine alla posizione di equilibrio statico delle due masse rispettivamente [1].

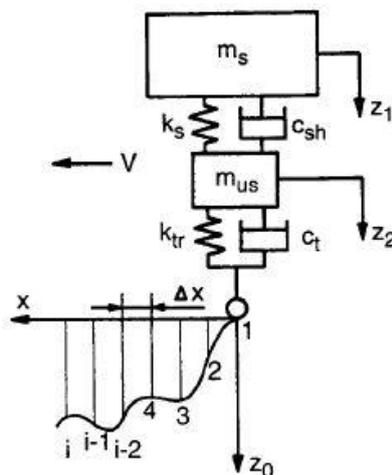


Figura 5: Modello a due gradi di libertà di  $\frac{1}{4}$  di veicolo.

Applicando l'equilibrio dinamico sulle due masse separatamente, è possibile ottenere le equazioni del moto. Considerando che le vibrazioni sono eccitate da un profilo stradale ondulato, tali equazioni sono le seguenti:

per la massa sospesa ( $m_s$ ),

$$m_s \cdot \ddot{z}_1 + c_{sh} \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_s \cdot (z_1 - z_2) = 0 \quad (1)$$

e per la massa non sospesa ( $m_{us}$ ),

$$m_{us} \cdot \ddot{z}_2 + c_{sh} \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_s \cdot (z_2 - z_1) + c_t \cdot \dot{z}_2 + k_{tr} \cdot z_2 = F(t) = c_t \cdot \dot{z}_0 + k_{tr} \cdot z_0 \quad (2)$$

dove  $m_s$  è la massa sospesa (Sprung Mass),  $m_{us}$  è la massa non sospesa (Unsprung Mass),  $c_{sh}$  è il coefficiente di smorzamento dell'ammortizzatore,  $c_t$  è il coefficiente di smorzamento dello pneumatico,  $k_s$  è la rigidezza della sospensione,  $k_{tr}$  è la rigidezza equivalente dello pneumatico, e  $F(t)$  è la forzante indotta dalle irregolarità della superficie stradale che agisce sulle ruote.

Se l'eccitazione del sistema è conosciuta, allora, le vibrazioni delle due masse possono essere determinate risolvendo l'equazione (1) e (2), che scritte in forma matriciale risultano:

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_{us} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{sh} & -c_{sh} \\ -c_{sh} & c_{sh} + c_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s + k_{tr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_t \cdot \dot{z}_0 + k_{tr} \cdot z_0 \end{bmatrix} \quad (1')$$

dove in forma compatta

$$[M] \cdot [\ddot{Z}] + [C] \cdot [\dot{Z}] + [K] \cdot [Z] = [F] \quad (2')$$

### 2.2.1 Determinazione analitica delle frequenze naturali del modello di veicolo

Per determinare le frequenze naturali del sistema a due gradi di libertà mostrato in Figura 5, bisogna considerare le vibrazioni libere e quindi porre  $F(t) = 0$ .

Per un sistema senza smorzamento e per le vibrazioni libere le equazioni del moto (1) e (2) diventano:

$$m_s \cdot \ddot{z}_1 + k_s \cdot z_1 - k_s \cdot z_2 = 0 \quad (3)$$

$$m_{us} \cdot \ddot{z}_2 + k_s \cdot z_2 - k_s \cdot z_1 + k_{tr} \cdot z_2 = 0 \quad (4)$$

Le soluzioni delle due equazioni differenziali appena citate possono essere espresse nella seguente forma:

$$z_1 = Z_1 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) \quad (5)$$

$$z_2 = Z_2 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) \quad (6)$$

dove  $\omega_n$  è la pulsazione naturale del sistema e  $Z_1$  e  $Z_2$  sono rispettivamente le ampiezze della massa sospesa e non sospesa.

Sostituendo tali soluzioni nelle equazioni (3) e (4) si ottengono le seguenti equazioni in funzione delle ampiezze delle due masse:

$$(-m_s \cdot \omega_n^2 + k_s) \cdot Z_1 - k_s \cdot Z_2 = 0 \quad (7)$$

$$-k_s \cdot Z_1 + (-m_{us} \cdot \omega_n^2 + k_s + k_{tr}) \cdot Z_2 = 0 \quad (8)$$

Queste equazioni sono soddisfatte per ogni  $Z_1$  e  $Z_2$  che rendono il determinante uguale a zero:

$$\begin{vmatrix} (-m_s \cdot \omega_n^2 + k_s) & -k_s \\ -k_s & (-m_{us} \cdot \omega_n^2 + k_s + k_{tr}) \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

risolvendo la (9) si ottiene l'equazione caratteristica del sistema:

$$\omega_n^4 \cdot (m_s \cdot m_{us}) + \omega_n \cdot (-m_s \cdot k_s - m_s \cdot k_{tr} - m_{us} \cdot k_s) + k_s \cdot k_{tr} = 0 \quad (10)$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica del sistema a due gradi di libertà in assenza di smorzamento e per vibrazioni libere sono:

$$\omega_{n1}^2 = \frac{B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1 \cdot C_1}}{2A_1} \quad (11)$$

$$\omega_{n2}^2 = \frac{B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4A_1 \cdot C_1}}{2A_1} \quad (12)$$

dove

$$A_1 = m_s \cdot m_{us} \quad (13)$$

$$B_1 = m_s \cdot k_s + m_s \cdot k_{tr} + m_{us} \cdot k_s \quad (14)$$

$$C_1 = k_s \cdot k_{tr} \quad (15)$$

Nonostante la (11) e la (12) presentano come soluzioni le pulsazioni naturali  $\pm\omega_{n1}^2$  e  $\pm\omega_{n2}^2$ , i valori negativi di quest'ultime vengono scartate in quanto non hanno nessun significato fisico.

Le corrispondenti frequenze naturali espresse in  $H_z$  sono calcolate nella seguente espressione:

$$f_{n1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_{n1} \quad (16)$$

$$f_{n2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_{n2} \quad (17)$$

E' importante definire che per una macchina da viaggio, la massa sospesa  $m_s$  è di un ordine di grandezza più grande della massa non sospesa  $m_{us}$ , mentre la rigidità della sospensione  $k_s$  è di un ordine più piccola della rigidità equivalente dello pneumatico  $k_{tr}$ .

In virtù di questo, è possibile usare un metodo approssimato per determinare le due frequenze naturali del sistema a due gradi di libertà. I valori approssimati delle frequenze naturali espresse in  $H_z$ , sia della massa sospesa che della massa non sospesa, sono calcolati rispettivamente nella seguente forma:

$$f_{n-s} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k_s \cdot k_{tr} / (k_s + k_{tr})}{m_s}} \quad (18)$$

$$f_{n-us} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k_s + k_{tr}}{m_{us}}} \quad (19)$$

### 2.3 *Analisi in frequenza del modello di ¼ di veicolo in ambiente MATLAB*

Si è analizzato il modello a due gradi di libertà di ¼ di veicolo, mostrato in Figura 5, in ambiente MATLAB.

In particolare sono stati studiati tre casi fondamentali per valutare le prestazioni globali del sistema sospensivo di un generico veicolo stradale:

- *Vibration Isolation*;
- *Suspension Travel*;
- *Roadholding*.

al variare del rapporto tra la massa non sospesa e la massa sospesa, del rapporto di rigidità tra la rigidità del sistema ruota-pneumatico e quella del sistema sospensivo, al variare del coefficiente di smorzamento della sospensione, della pressione di gonfiaggio e della velocità di avanzamento del veicolo. Inoltre queste analisi sono state eseguite trascurando, in primis, il coefficiente di smorzamento dello pneumatico e successivamente considerandolo non nullo.

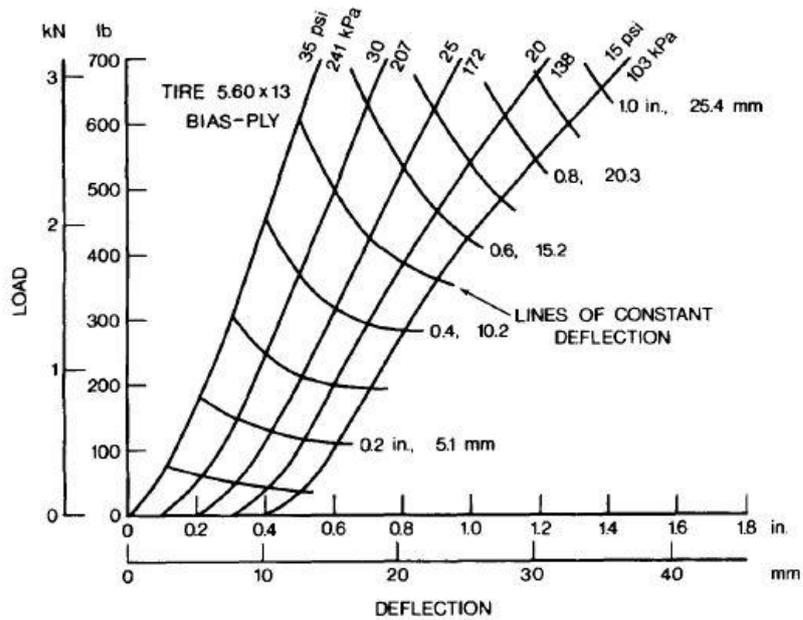
E' importante sottolineare come la rigidità del sistema ruota-pneumatico varia al variare della pressione di gonfiaggio dello pneumatico stesso e della velocità di avanzamento del veicolo, come mostrato nel seguente paragrafo 2.3.1.

### *2.3.1 Caratteristiche degli pneumatici*

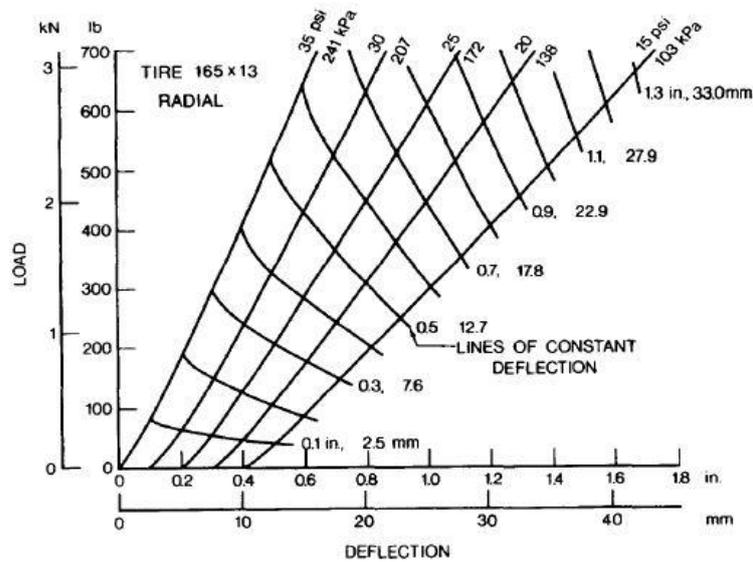
Prima di passare all'analisi del modello di  $\frac{1}{4}$  di veicolo, è importante definire alcune proprietà dello pneumatico, le quali sono fondamentali per tale analisi.

#### *Static Stiffness*

La rigidità statica verticale dello pneumatico è determinata dalla pendenza delle curve mostrate in Figura 6 e Figura 7. E' stato trovato che per una determinata pressione di gonfiaggio, le caratteristiche di carico-deformazione per entrambi gli pneumatici radiali e convenzionali sono pressoché lineari, eccetto per valori bassi di carico.



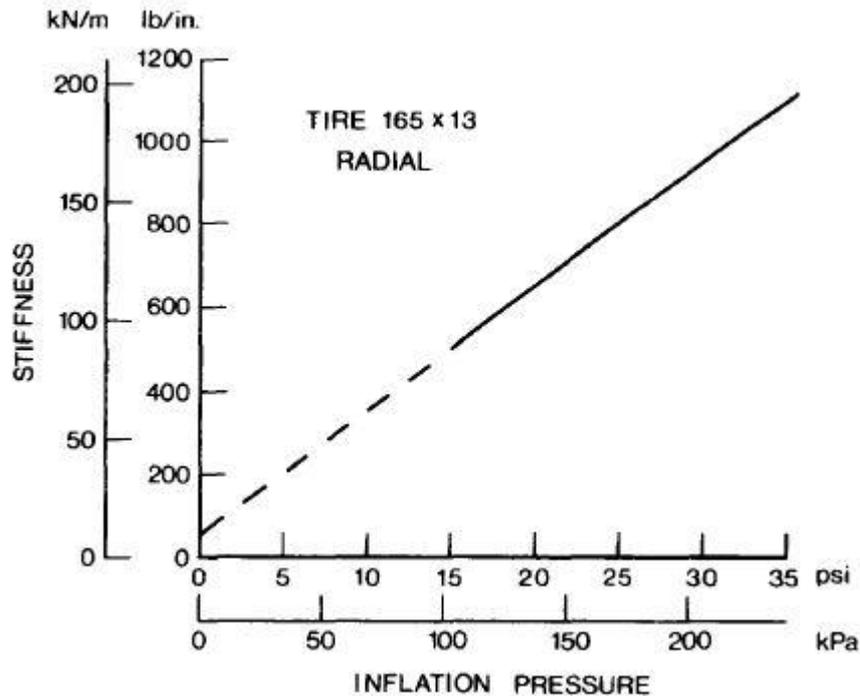
**Figura 6:** Rigidezza verticale statica di uno pneumatico convenzionale in funzione della pressione di gonfiaggio.



**Figura 7:** Rigidezza verticale statica di uno pneumatico radiale in funzione della pressione di gonfiaggio.

Successivamente è possibile assumere che la rigidezza verticale dello pneumatico è indipendente dal carico nel range di pratico interesse.

E' di maggiore importanza la variazione della rigidezza statica dello pneumatico al variare della pressione di gonfiaggio come mostrato in Figura 8.

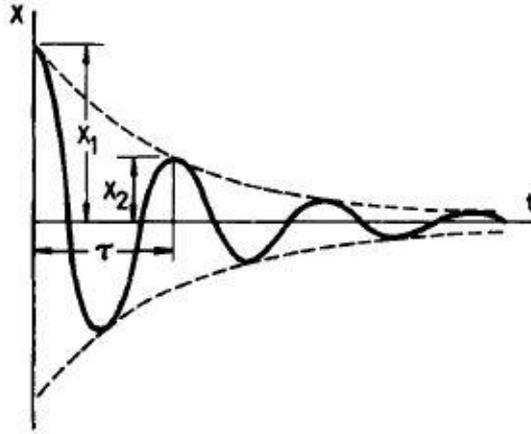


**Figura 8:** Rigidezza statica di uno pneumatico radiale in funzione della pressione di gonfiaggio dello pneumatico stesso.

E' possibile notare dalla Figura 8 come la rigidezza statica di uno pneumatico radiale varia linearmente al variare della pressione di gonfiaggio [6].

### Nonrolling Dynamic Stiffness

La rigidezza dinamica di uno pneumatico che non sta rotolando può essere ottenuta utilizzando vari metodi, uno dei quali, il più semplice, è chiamato "*drop test*". In questo test, lo pneumatico, con un determinato carico, viene lasciato cadere liberamente da un'altezza fino a quando entra in contatto con il suolo, rimanendo in contatto con esso per tutta la durata del test. In questo modo la risposta transitoria è registrata ed ha un andamento simile a quello rappresentato in Figura 9.



**Figura 9:** Una generica ampiezza di decadimento di uno pneumatico sottoposto al drop test.

I valori del coefficiente equivalente di smorzamento  $c_{eq}$  e della rigidezza dinamica  $k_z$  dello pneumatico possono essere determinati dalla risposta ottenuta dal drop test usando bene la teoria delle vibrazioni libere di un sistema ad un grado di libertà:

$$c_{eq} = \sqrt{\frac{4 \cdot m^2 \cdot \omega_d^2 \cdot \delta^2 / (\delta^2 + 4 \cdot \pi^2)}{1 - [\delta^2 / (\delta^2 + 4 \cdot \pi^2)]}} \quad (20)$$

e

$$k_z = \sqrt{\frac{m \cdot \omega_d^2}{1 - \delta^2 / (\delta^2 + 4 \cdot \pi^2)}} \quad (21)$$

dove  $\omega_d$  è la pulsazione propria dello pneumatico con la massa  $m$ , e può essere espressa dalla seguente formula:

$$\omega_d = 2 \cdot \pi / \tau \quad (22)$$

dove  $\tau$  è il periodo dell'oscillazione smorzata mostrata in Figura 9.

$\delta$  è il decremento logaritmico, il quale è definito come il logaritmo naturale del rapporto delle due ampiezze successive, come  $x_1$  e  $x_2$ , mostrate in Figura 9.

$$\delta = \ln(x_1/x_2) \quad (23)$$

I valori dei coefficienti di smorzamento per gli pneumatici radiali e convenzionali sono rappresentati nella seguente tabella:

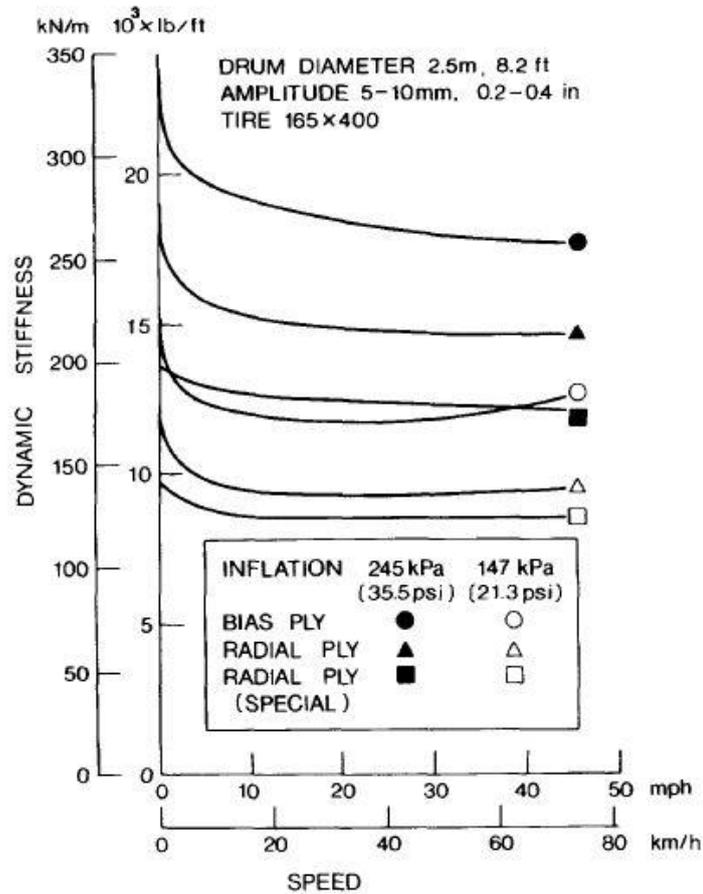
<b>Tire</b>	<b>Inflation pressure [kPa]</b>	<b>Damping Coefficient [kN*s/m]</b>
<i>Convenzionale (bias-ply)</i>	103,4	4,59
	137,9	4,89
	172,4	4,52
	206,9	4,09
	241,3	4,09
<i>Radiale (Radial-ply)</i>	103,4	4,45
	137,9	3,68
	172,4	3,44
	206,9	3,43
	241,3	2,86

**Tabella 1:** Coefficiente di smorzamento dello pneumatico in funzione della pressione di gonfiaggio.

### **Rolling Dynamic Stiffness**

La rigidità dinamica di rotolamento è di solito determinata misurando la risposta di uno pneumatico che rotola per effetto di un'eccitazione armonica conosciuta. La risposta è normalmente misurata al mozzo e l'eccitazione è applicata sul battistrada. Esaminando il rapporto tra output e input e l'angolo di fase, è possibile determinare la rigidità dinamica e il coefficiente di smorzamento dello pneumatico che rotola.

La Figura 10 mostra i valori della rigidità dinamica per vari tipi di pneumatici stradali in funzione della velocità di avanzamento del veicolo e della pressione di gonfiaggio dello pneumatico stesso, ottenuti utilizzando il metodo appena descritto.



**Figura 10:** Rigidezza dinamica dei diversi pneumatici stradali in funzione della velocità di avanzamento del veicolo e della pressione di gonfiaggio dello pneumatico stesso.

E' possibile notare che la rigidezza dinamica degli pneumatici decresce bruscamente appena lo pneumatico incomincia a rotolare. Tuttavia, ad una velocità di oltre 10 km/h, la rigidezza rimane pressoché costante per cui l'influenza della velocità diventa meno importante.

Alcuni report indicano che, per macchine da viaggio, la rigidezza dinamica può essere il 10-15% minore di quella statica rappresentata dalle curve carico statico-deformazione presenti in Figura 6 e Figura 7.

E' stato mostrato che la variazione di alcuni parametri come la pressione di gonfiaggio, la velocità, il carico normale e l'usura hanno una notevole influenza sulla rigidezza dello pneumatico. Anche i parametri di progettazione come l'angolo di accoppiamento delle fibre dello

pneumatico (*crown angle*), la larghezza e lo spessore del battistrada, il numero di tele e il tipo di materiale dello pneumatico, influenzano la rigidità ma in modo trascurabile [1].

### 2.3.2 *Vibration Isolation*

Facendo sempre riferimento al modello a due gradi di libertà di  $\frac{1}{4}$  di veicolo di Figura 5 del paragrafo 2.2, la *vibration isolation* può essere valutata dalla risposta della massa sospesa (output) per effetto dell'eccitazione proveniente dal manto stradale (input). Quindi il rapporto di trasmissibilità (o funzione di trasferimento) viene rappresentato come il rapporto tra l'ampiezza di vibrazione della massa sospesa  $Z_1$  (output) e quella del profilo stradale  $Z_0$  (input) in termini di ampiezze.

Le varie analisi del modello, in ambiente MATLAB, sono state eseguite considerando rispettivamente i dati rappresentati nella tabella seguente:

Massa sospesa	$m_s = 454.5 \text{ kg}$
Rapporto masse	$m_{us}/m_s = [0.05, 0.10, 0.20]$
Coefficiente di rigidità di uno pneumatico gonfio (2,45 bar)	$k_{tr1} = 221 \text{ kN/m}$
Coefficiente di rigidità di uno pneumatico sgonfio (1,47 bar)	$k_{tr2} = 136 \text{ kN/m}$
Rapporto rigidità	$k_{tr}/k_s = [5, 8, 10]$
Smorzamento del sistema sospensivo	$\xi = [0.1, 0.3, 0.707]$
Coefficiente di smorzamento dello pneumatico alla pressione di 2,45 bar	$c_{t1} = 2.79 \text{ kN} \cdot \text{s/m}$
Coefficiente di smorzamento dello pneumatico alla pressione di 1,47 bar	$c_{t2} = 3.62 \text{ kN} \cdot \text{s/m}$

**Tabella 2:** Dati utilizzati per l'analisi del modello a due gradi di libertà di  $\frac{1}{4}$  di veicolo.

Dalla Tabella 2 si evince che le analisi sono state eseguite al variare del rapporto delle masse, del rapporto di rigidità, dello smorzamento del sistema sospensivo e al variare dei coefficienti di rigidità e di smorzamento dello pneumatico. Quest'ultimi due sono stati ricavati rispettivamente dal diagramma di Figura 10 e dalla Tabella 1 del paragrafo 2.3.1, alla pressione di 2.45 bar e di 1.47 bar considerando una velocità di avanzamento del veicolo pari a 10 km/h.

Partendo dalle due equazioni differenziali (1) e (2), o meglio dalle equazioni differenziali descritte in forma matriciale (1') e (2') del paragrafo 2.2.1, che reggono l'equilibrio dinamico del sistema interessato, è possibile ottenere la generica Funzione di Trasferimento.

Scrivendo tali equazioni del moto nella forma standard di variabile di stato si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_2 - z_0 \\ \dot{z}_2 \\ z_1 - z_2 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{tr}}{m_{us}} & -\frac{(c_{sh}+c_t)}{m_{us}} & \frac{k_s}{m_{us}} & \frac{c_{sh}}{m_{us}} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{c_{sh}}{m_s} & -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_{sh}}{m_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_2 - z_0 \\ \dot{z}_2 \\ z_1 - z_2 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ c_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{z}_0 \quad (3')$$

dove in linea generale si può scrivere

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \quad (4')$$

$$y = C \cdot x + D \cdot u \quad (5')$$

dove

- $x$  è vettore degli stati del modello lineare;
- $y$  rappresenta gli output del modello lineare;
- $u$  rappresenta gli input al modello lineare;
- $[A, B, C, D]$  sono le matrici di stato del modello lineare.

Usando la trasformata di Laplace, le equazioni (4') e (5') possono essere espresse:

$$s \cdot x(s) = A \cdot x(s) + B \cdot u(s) \quad (6')$$

$$y(s) = C \cdot x(s) + D \cdot u(s) \quad (7')$$

dove  $s$  è la variabile di Laplace [7].

La funzione di trasferimento si ottiene combinando la (6') con la (7') infatti:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D \quad (8')$$

In questo modo si ottiene l'equazione (24) espressa nella seguente forma:

$$\frac{Z_1}{Z_0}(s) = \frac{(c_{sh} \cdot c_t) \cdot s^2 + (c_{sh} \cdot k_{tr} + c_t \cdot k_s) \cdot s + k_s \cdot k_{tr}}{(m_s \cdot m_{us}) \cdot s^4 + (m_s \cdot c_{sh} + m_s \cdot c_t + m_{us} \cdot c_{sh}) \cdot s^3 + (m_s \cdot k_s + m_s \cdot k_{tr} + c_{sh} \cdot c_t + m_{us} \cdot k_s) \cdot s^2 + (c_{sh} \cdot k_{tr} + c_t \cdot k_s) \cdot s + k_s \cdot k_{tr}} \quad (24)$$

Tale funzione rappresenta la trasmissibilità del sistema e quindi la sua caratteristica intrinseca.

### **Trasmissibilità al variare del rapporto delle masse**

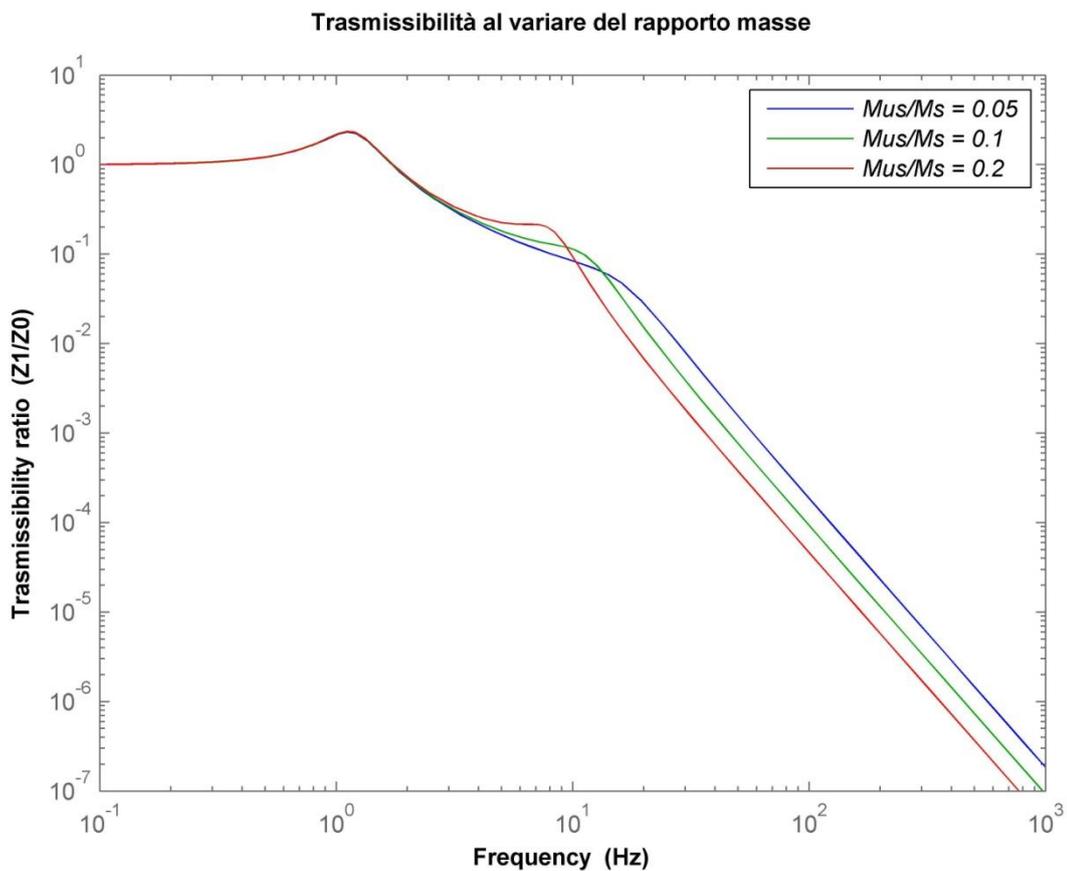
Facendo riferimento ai dati in Tabella 2 e considerando uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, un rapporto di rigidezze pari a 8, uno smorzamento del sistema sospensivo pari a 0.3 e considerando il coefficiente di smorzamento dello pneumatico nullo, l'equazione (24) diventa in termini numerici:

$$\frac{Z_1}{Z_0}(s) =$$

$$\frac{4.699 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9}{1.033 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 1.015 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.136 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 4.699 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9}$$

considerando un rapporto di masse pari a 0.05.

La Figura 11 mostra l'effetto del rapporto tra la massa non sospesa e la massa sospesa sulla trasmissibilità del sistema considerato.



**Figura 11:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle due masse in assenza di smorzamento dello pneumatico.

In questo caso le due frequenze naturali del sistema sono:

- $f_{n-s} = 1.17 \text{ Hz}$  frequenza naturale della massa sospesa;
- $f_{n-s} = 16.65 \text{ Hz}; 11.77 \text{ Hz}; 8.32 \text{ Hz}$  frequenza naturale della massa non sospesa  
rispettivamente al rapporto di masse  $\frac{m_{us}}{m_s} = 0.05; 0.10; 0.20$ .

E' possibile vedere che in un range di frequenza al di sotto della frequenza naturale della massa sospesa (intorno ad 1 Hz), la massa non sospesa influisce poco sulla vibrazione della  $m_s$ . Quando la frequenza di eccitazione è vicina alla frequenza naturale della massa non sospesa (intorno a 10 Hz), più bassa è la  $m_{us}$ , più basso sarà il rapporto di trasmissibilità. Questo vuol dire che con lo stesso livello di eccitazione, la vibrazione della  $m_s$  è più bassa con una  $m_{us}$  più leggera.

Tuttavia, in un range di frequenza al di sopra di quella naturale della  $m_{us}$ , una massa non sospesa più leggera porterà ad un rapporto di trasmissibilità più alto. Per un range di frequenza medio, invece, una  $m_{us}$  più leggera rende migliore l'isolamento delle vibrazioni, quindi un rapporto di trasmissibilità leggermente più basso.

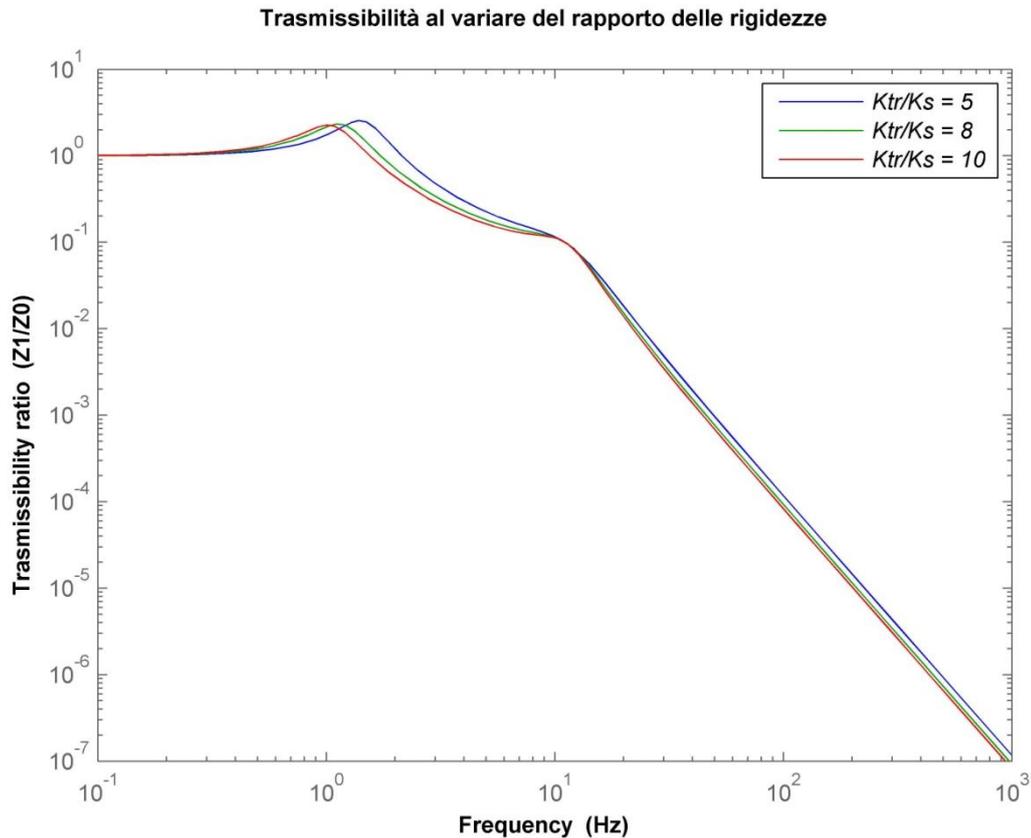
### Trasmissibilità al variare del rapporto delle rigidità

Anche in questo caso considerando uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, un rapporto delle masse pari a 0.1, uno smorzamento del sistema sospensivo pari a 0.3 e considerando il coefficiente di smorzamento dello pneumatico nullo, l'equazione (24) diventa in termini numerici:

$$\frac{Z_1}{Z_0}(s) = \frac{5.943 \cdot 10^8 \cdot s + 9.768 \cdot 10^9}{2.066 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 1.344 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.225 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 5.943 \cdot 10^8 \cdot s + 9.768 \cdot 10^9}$$

con un rapporto delle rigidità pari a 5.

La Figura 12 mostra l'effetto del rapporto delle rigidezze sulla trasmissibilità del sistema considerato.



**Figura 12:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle due rigidezze in assenza di smorzamento dello pneumatico.

In questo caso le due frequenze naturali del sistema sono:

- $f_{n-s} = 1.43 H_z; 1.17 H_z; 1.06 H_z$  frequenze naturali della massa sospesa;
- $f_{n-s} = 12.16 H_z; 11.77 H_z; 11.64 H_z$  frequenze naturali della massa non sospesa

rispettivamente al rapporto di rigidezze  $\frac{k_{tr}}{k_s} = 5; 8; 10$ .

Per una data rigidezze dello pneumatico, un più alto rapporto di  $k_{tr}/k_s$  indica una rigidezze della sospensione più bassa. E' possibile vedere che in un range di frequenza al di sotto di quella naturale della massa sospesa, più basso è il rapporto  $k_{tr}/k_s$ , più basso sarà il rapporto di trasmissibilità. In un range di frequenza tra le due frequenze naturali, una sospensione più morbida (o un più alto  $k_{tr}/k_s$ ) presenta un migliore isolamento delle vibrazioni. In un range di

frequenza al di sopra della seconda frequenza naturale ( $f_{n-s}$ ), la rigidità della sospensione ha un effetto insignificante sulla vibrazione della massa sospesa, per cui il rapporto di trasmissibilità è più basso e indipendente dal rapporto  $k_{tr}/k_s$ .

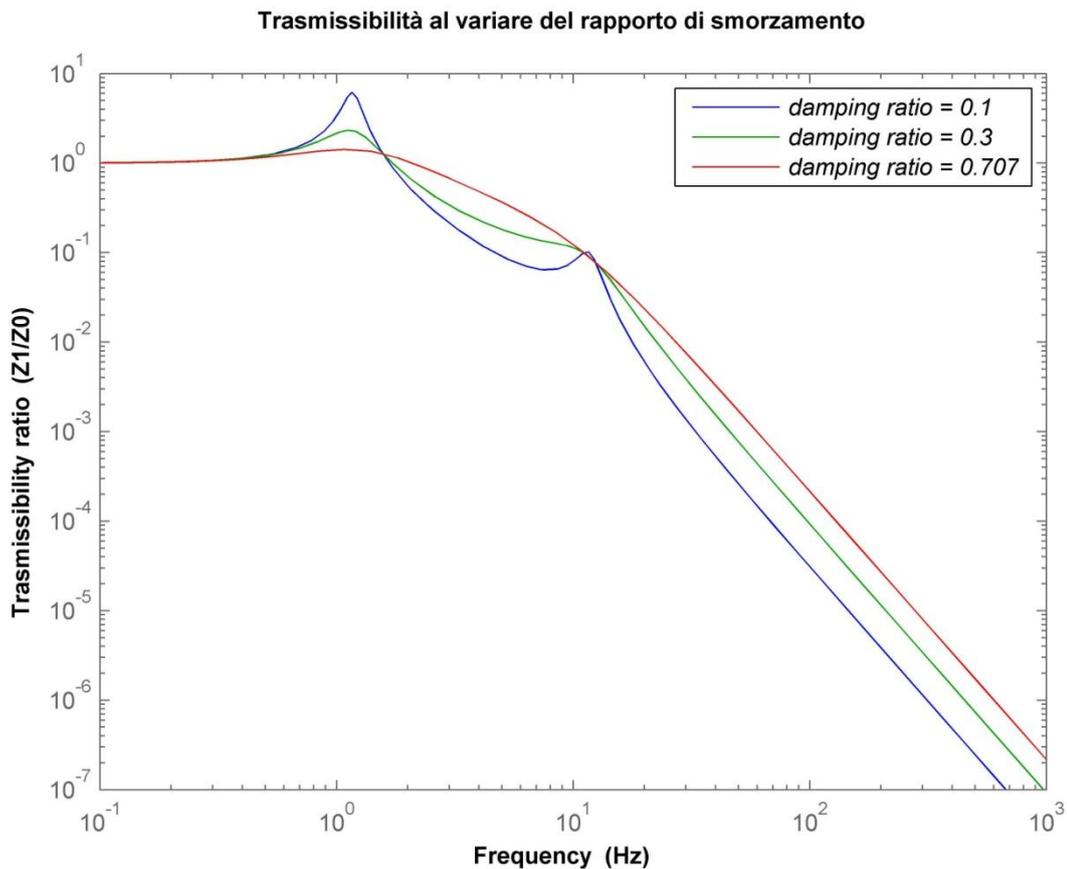
### **Trasmissibilità al variare del rapporto di smorzamento**

Con uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, un rapporto di rigidità pari a 8, un rapporto delle masse pari a 0.1 e considerando il coefficiente di smorzamento dello pneumatico nullo, l'equazione (24) diventa in termini numerici:

$$\frac{Z_1}{Z_0}(s) = \frac{1.566 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9}{2.066 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 3.543 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.143 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 1.566 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9}$$

considerando un rapporto di smorzamento pari a 0.1.

La Figura 13 mostra l'effetto del rapporto di smorzamento sulla trasmissibilità del sistema considerato.



**Figura 13:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto di smorzamento in assenza di smorzamento dello pneumatico.

In questo caso le due frequenze naturali del sistema sono:

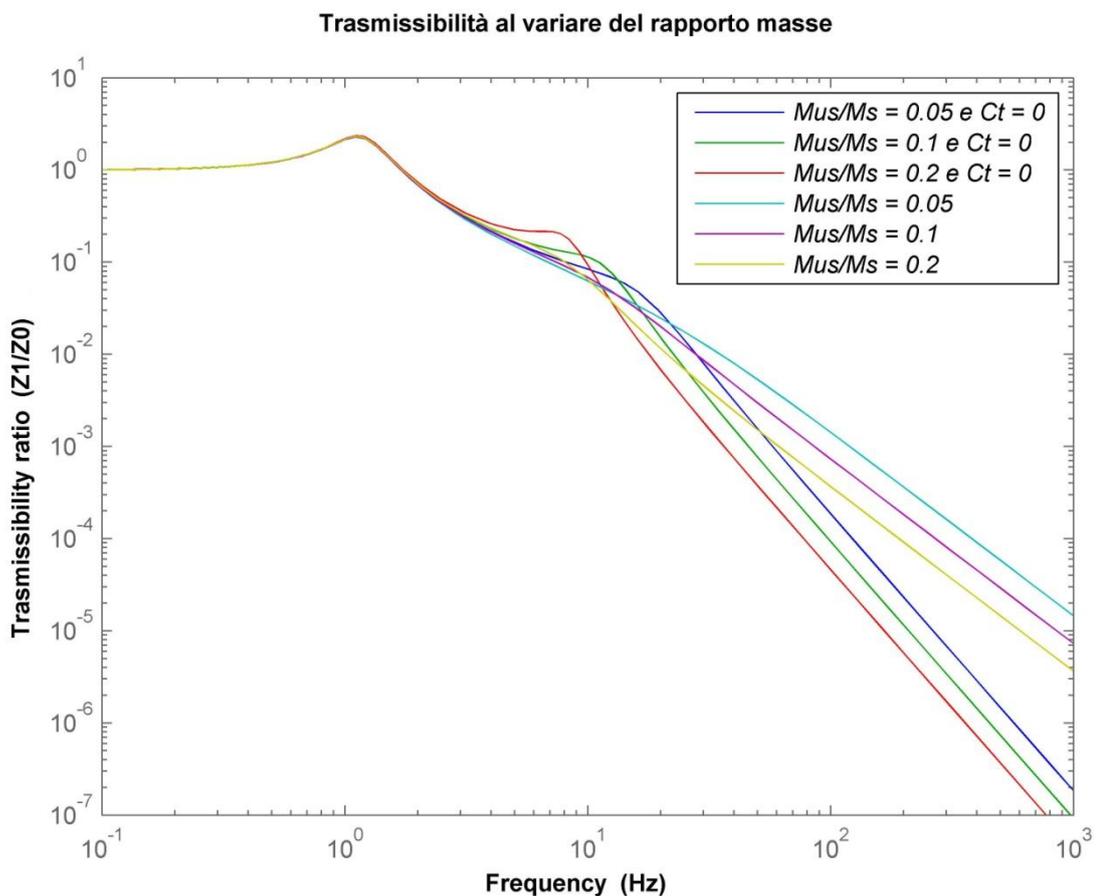
- $f_{n-s} = 1.17 \text{ Hz}$  frequenza naturale della massa sospesa;
- $f_{n-s} = 11.77 \text{ Hz}$  frequenza naturale della massa non sospesa.

Si nota che in un range di frequenza vicino a quella naturale della massa sospesa, più alto è il rapporto di smorzamento, più bassa sarà la trasmissibilità. In un range di frequenza tra le due frequenze naturali, più basso è il rapporto di smorzamento, più bassa sarà la trasmissibilità. Ad una frequenza vicino a quella naturale della massa non sospesa, il rapporto di smorzamento ha poca influenza sulla risposta della massa sospesa. Tuttavia, in un range di frequenza al di sopra della seconda frequenza naturale, un rapporto di smorzamento più basso, porterà ad una trasmissibilità più bassa.

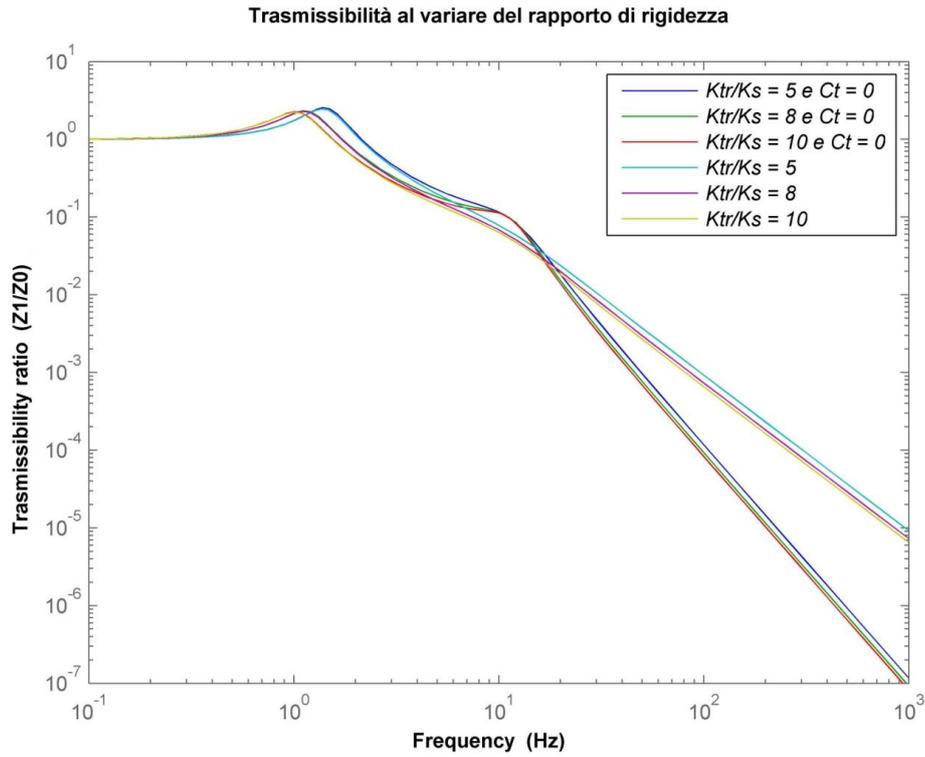
Dall'analisi fatta, è possibile vedere che per avere una buon isolamento delle vibrazioni, in un range di frequenza vicino a quella naturale della massa sospesa, è necessario un rapporto di smorzamento più alto. In un range di frequenza medio-alto è preferibile avere un rapporto di smorzamento più basso. Per tale motivo un rapporto di smorzamento pari a 0.3 è un buon compromesso.

### Trasmissibilità con e senza smorzamento dello pneumatico

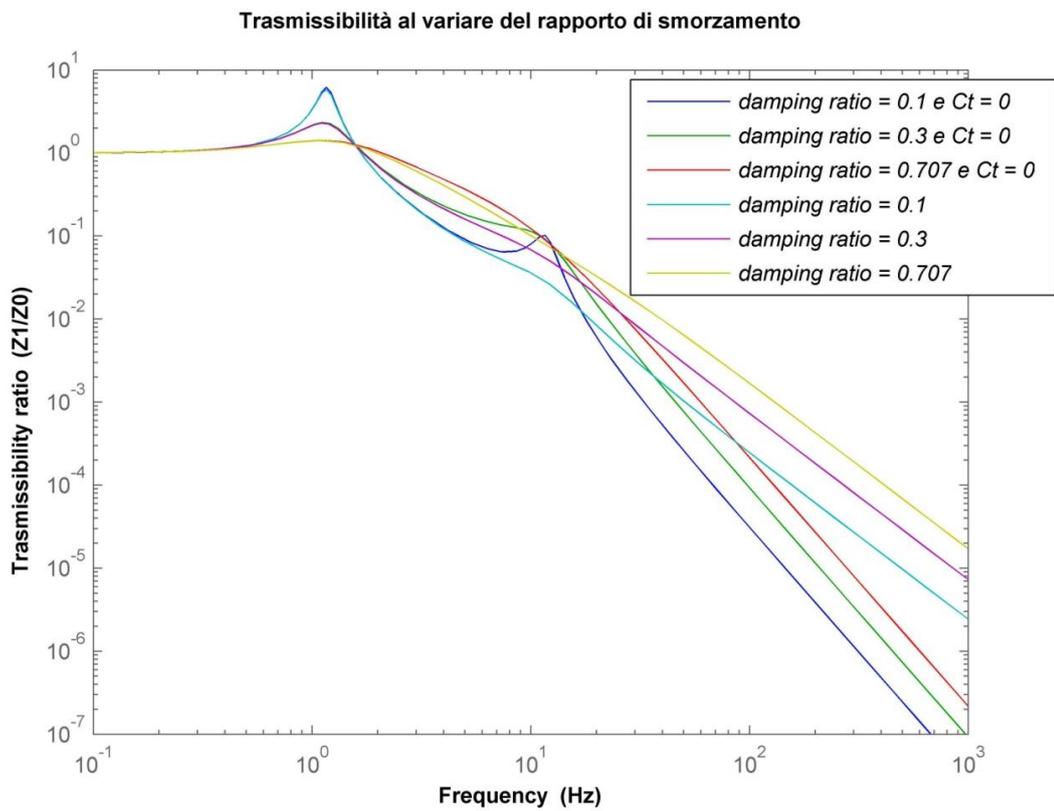
In questo caso si riportano i diagrammi delle tre analisi precedenti sulla trasmissibilità considerando anche il coefficiente di smorzamento dello pneumatico alla pressione di 2.45 bar.



**Figura 14:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle due masse con e senza di smorzamento dello pneumatico.



**Figura 15:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle rigidità con e senza di smorzamento dello pneumatico.



**Figura 16:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto di smorzamento con e senza smorzamento dello pneumatico.

Le Figura 14, Figura 15 e Figura 16 mostrano la risposta in frequenza della trasmissibilità di  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto masse, del rapporto rigidezze, del rapporto di smorzamento considerando anche il coefficiente di smorzamento dello pneumatico.

Si evince che lo smorzamento dello pneumatico, per frequenze di eccitazione al di sotto della prima frequenza naturale, non influisce sulla trasmissibilità del sistema mentre, per frequenze di eccitazione vicine alla seconda frequenza naturale, esso tende lievemente ad abbassare la trasmissibilità del sistema. Questo implica un migliore isolamento delle vibrazioni.

Infine, per frequenze di eccitazione al di sopra della seconda frequenza naturale, esso tende ad aumentare lievemente la trasmissibilità del sistema.

Alla luce di queste considerazioni, lo smorzamento dello pneumatico può essere considerato trascurabile.

### **Trasmissibilità al variare della pressione**

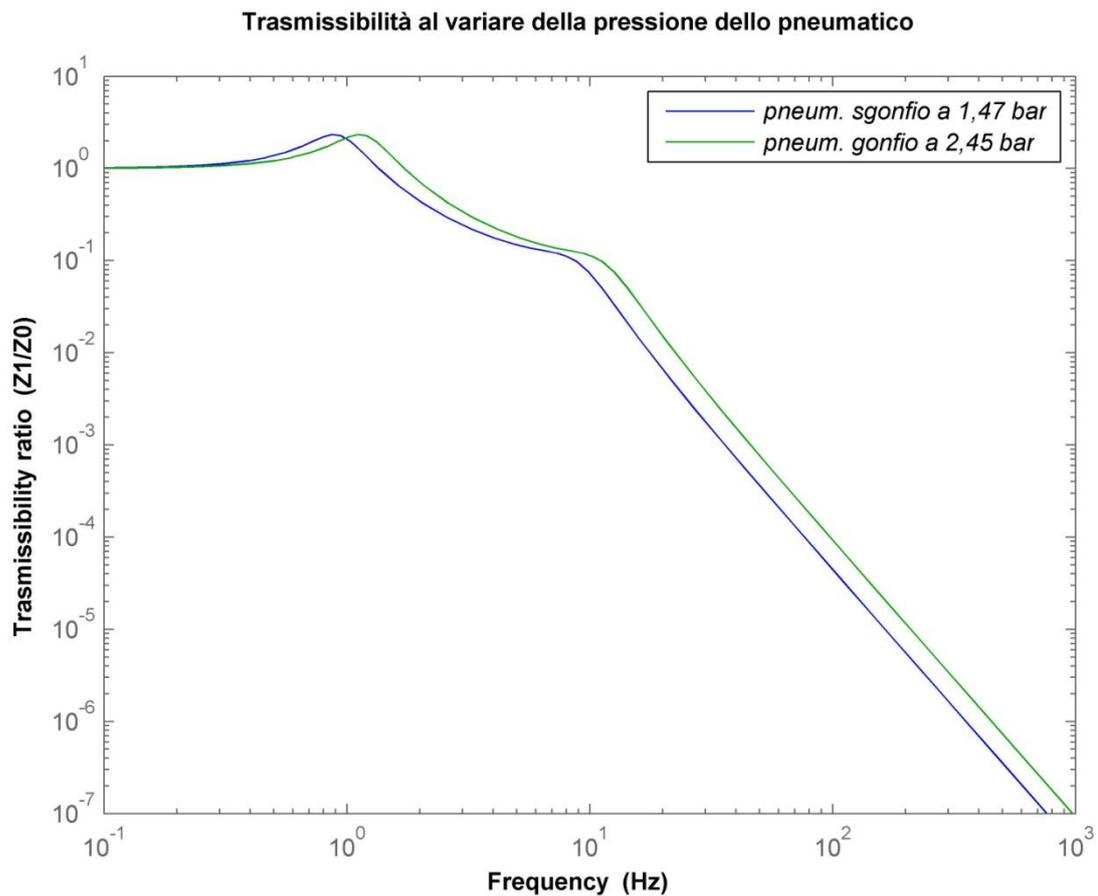
In questo caso si effettua l'analisi in frequenza della trasmissibilità al variare solo della pressione con un rapporto di masse pari a 0.1, un rapporto di rigidezza pari a 8 e un rapporto di smorzamento pari a 0.3.

Facendo sempre riferimento ai dati in Tabella 2 l'equazione (24) risulta:

$$\frac{Z_1}{Z_0}(s) = \frac{4.699 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9}{2.066 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 1.063 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.143 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 4.699 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9}$$

considerando una pressione di 2.45 bar e quindi uno pneumatico gonfio.

La Figura 17 mostra l'effetto della variazione della pressione sulla trasmissibilità del sistema considerato.



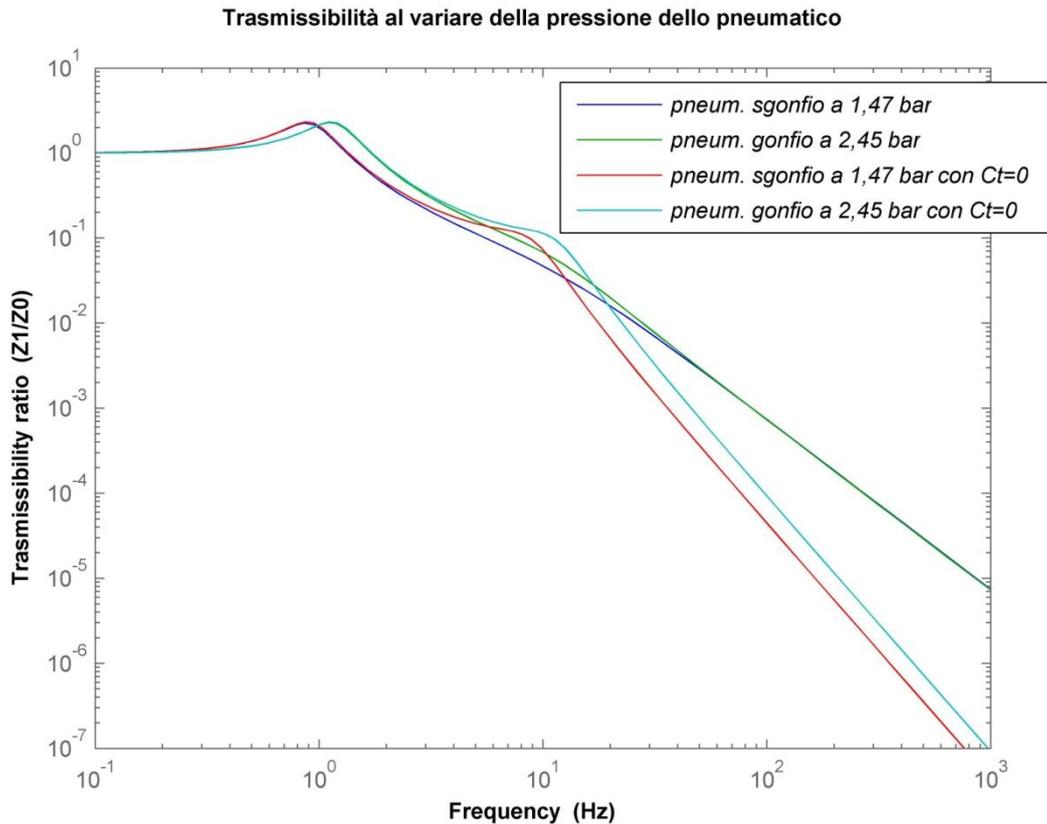
**Figura 17:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare della pressione in assenza di smorzamento dello pneumatico.

Si evince che la variazione della pressione dello pneumatico provoca solo uno slittamento della risposta in frequenza della trasmissibilità di pochi  $H_z$ , infatti le due frequenze naturali del sistema sono:

- $f_{n-s} = 0.92 H_z$  frequenza naturale della massa sospesa alla pressione di 1.47 bar;
- $f_{n-s} = 1.17 H_z$  frequenza naturale della massa sospesa alla pressione di 2.45 bar;
- $f_{n-s} = 9.23 H_z$  frequenza naturale della massa non sospesa alla pressione di 1.47 bar;
- $f_{n-s} = 11.77 H_z$  frequenza naturale della massa non sospesa alla pressione di 2.45 bar.

in assenza di smorzamento dello pneumatico.

La Figura 18 mostra la stessa analisi precedente considerando anche il coefficiente di smorzamento dello pneumatico alla pressione di 2.45 bar.



**Figura 18:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare della pressione con e senza smorzamento dello pneumatico.

I relativi codici in MATLAB sono inseriti nell'Appendice A.

### 2.3.3 Suspension travel

Prendendo sempre come riferimento il modello di Figura 5 del paragrafo 2.2, essa è misurata con la deviazione della sospensione o dallo spostamento relativo tra la massa sospesa e la massa non

sospesa ( $Z_2 - Z_1$ ). Precisamente definisce lo spazio richiesto, che si ha tra la massima estensione e il ritorno alla posizione iniziale della sospensione, comunemente chiamato "*rattle race*".

Le varie analisi del modello, in ambiente MATLAB, sono state eseguite considerando rispettivamente i dati rappresentati in Tabella 2.

La caratteristica intrinseca del sistema può essere descritta dalla seguente Funzione di Trasferimento:

$$\begin{aligned} \frac{(Z_2 - Z_1)}{Z_0}(s) &= \\ &= \frac{(m_s \cdot c_t) \cdot s^3 + (m_s \cdot k_{tr}) \cdot s^2}{(m_s \cdot m_{us}) \cdot s^4 + (m_s \cdot c_{sh} + m_s \cdot c_t + m_{us} \cdot c_{sh}) \cdot s^3 + (m_s \cdot k_s + m_s \cdot k_{tr} + c_{sh} \cdot c_t + m_{us} \cdot k_s) \cdot s^2 + (c_{sh} \cdot k_{tr} + c_t \cdot k_s) \cdot s + k_s \cdot k_{tr}} \end{aligned} \quad (25)$$

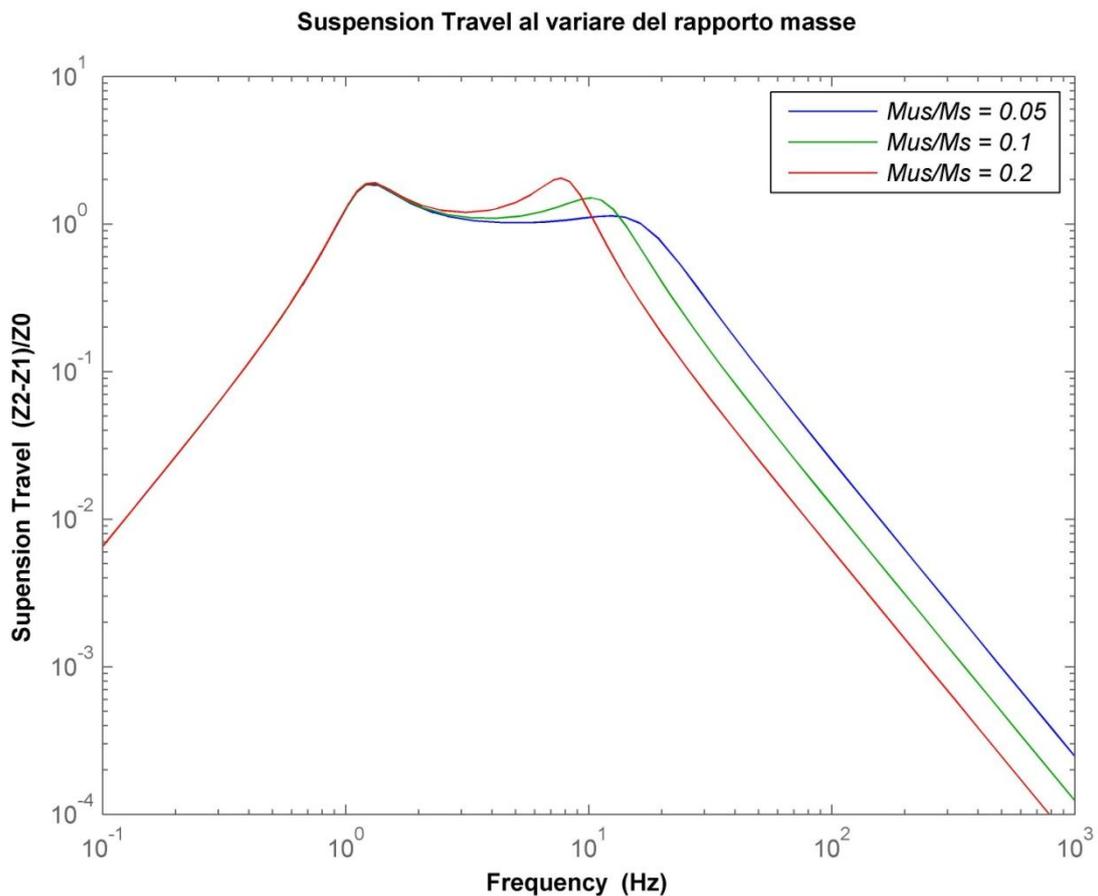
### **Suspension Travel al variare del rapporto delle masse**

Facendo riferimento ai dati in Tabella 2 e considerando uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, un rapporto di rigidezze pari a 8, uno smorzamento del sistema sospensivo pari a 0.3 e considerando inizialmente il coefficiente di smorzamento dello pneumatico nullo, l'equazione (25) diventa in termini numerici:

$$\begin{aligned} \frac{(Z_2 - Z_1)}{Z_0}(s) &= \\ &= \frac{1.004 \cdot 10^8 \cdot s^2}{1.033 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 1.015 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.136 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 4.699 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9} \end{aligned}$$

con un rapporto delle masse pari a 0.05.

La Figura 19 mostra l'effetto del rapporto tra la massa non sospesa e la massa sospesa sul rapporto suspension travel del sistema, il quale è definito come il rapporto tra lo spostamento massimo relativo tra le due masse e l'ampiezza del profilo stradale sinusoidale.



**Figura 19:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle due masse in assenza di smorzamento dello pneumatico.

In questo caso le due frequenze naturali del sistema sono:

- $f_{n-s} = 1.17 H_z$  frequenza naturale della massa sospesa;
- $f_{n-s} = 16.65 H_z; 11.77 H_z; 8.32 H_z$  frequenza naturale della massa non sospesa  
rispettivamente al rapporto di masse  $\frac{m_{us}}{m_s} = 0.05; 0.10; 0.20$ .

E' possibile vedere che per una data ampiezza della superficie stradale  $Z_0$ , in un range di frequenza al di sotto della prima frequenza naturale, il rapporto  $m_{us}/m_s$  ha un piccolo effetto sulla suspension travel. In un range di frequenza tra le due frequenze naturali, l'incremento del rapporto delle masse provoca un incremento della suspension travel. Tuttavia, in un range di

frequenza al di sopra della seconda frequenza naturale, più alto è il rapporto delle masse, più bassa sarà la suspension travel.

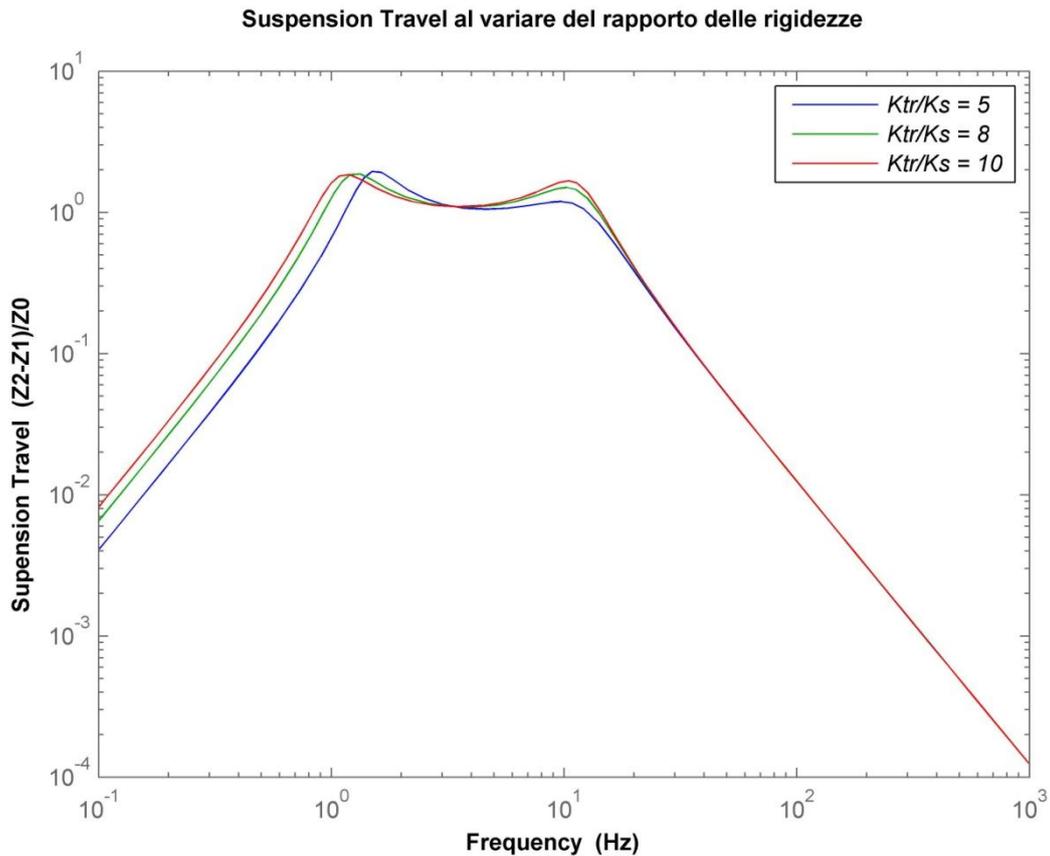
**Suspension Travel al variare del rapporto delle rigidzze**

Considerando uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, un rapporto delle masse pari a 0.1, uno smorzamento del sistema sospensivo pari a 0.3 e considerando inizialmente il coefficiente di smorzamento dello pneumatico nullo, l'equazione (25) diventa in termini numerici:

$$\frac{(Z_2 - Z_1)}{Z_0}(s) = \frac{1.004 \cdot 10^8 \cdot s^2}{2.066 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 1.344 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.225 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 5.943 \cdot 10^8 \cdot s + 9.768 \cdot 10^9}$$

con un rapporto di rigidzza pari a 5.

La Figura 20 mostra l'effetto del rapporto delle rigidzze sulla suspension travel del sistema considerato.



**Figura 20:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle due rigidzze in assenza di smorzamento dello pneumatico.

Le due frequenze naturali del sistema sono:

- $f_{n-s} = 1.43 H_z; 1.17 H_z; 1.06 H_z$  frequenze naturali della massa sospesa;
- $f_{n-s} = 12.16 H_z; 11.77 H_z; 11.64 H_z$  frequenze naturali della massa non sospesa

rispettivamente al rapporto di rigidzze  $\frac{k_{tr}}{k_s} = 5; 8; 10$ .

Si nota che in un range di frequenza al di sotto della prima frequenza naturale, una sospensione più morbida porta ad una più alta suspension travel, mentre in un range di frequenza al di sopra della seconda frequenza naturale, la rigidzza della sospensione ha un piccolo effetto sulla suspension travel. Infine in un range di frequenza medio, la risposta è inizialmente bassa con una sospensione più morbida, e dopo è più alta ad una frequenza che si avvicina a quella naturale della massa non sospesa. La frequenza alla quale c'è questo cambio di pendenza della risposta è chiamata "frequenza di crossover" che in questo caso è intorno ai  $3 H_z$ .

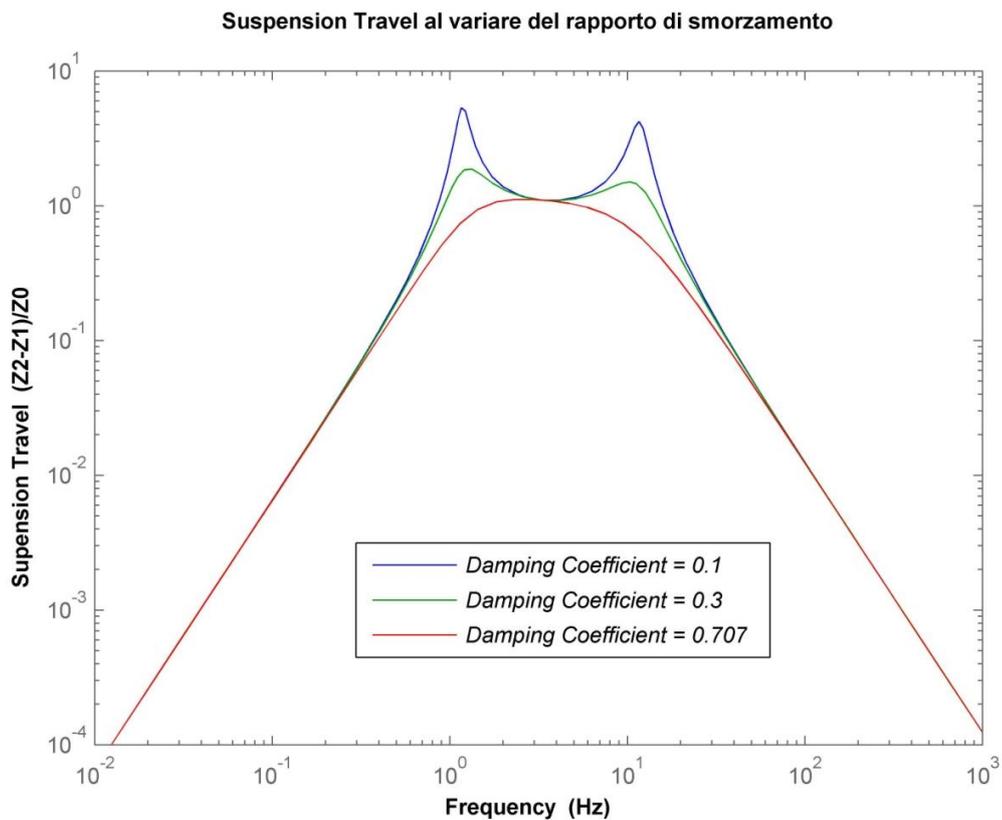
### Suspension Travel al variare del rapporto di smorzamento

Con uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, un rapporto di rigidzze pari a 8, un rapporto delle masse pari a 0.1 e considerando inizialmente il coefficiente di smorzamento dello pneumatico nullo, l'equazione (25) diventa in termini numerici:

$$\frac{(Z_2 - Z_1)}{Z_0}(s) = \frac{1.004 \cdot 10^8 \cdot s^2}{2.066 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 3.543 \cdot 10^5 \cdot s^3 + 1.143 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 1.566 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9}$$

considerando un rapporto di smorzamento pari a 0.1.

La Figura 21 mostra l'effetto del rapporto di smorzamento sulla suspension travel del sistema considerato.



**Figura 21:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto di smorzamento in assenza di smorzamento dello pneumatico.

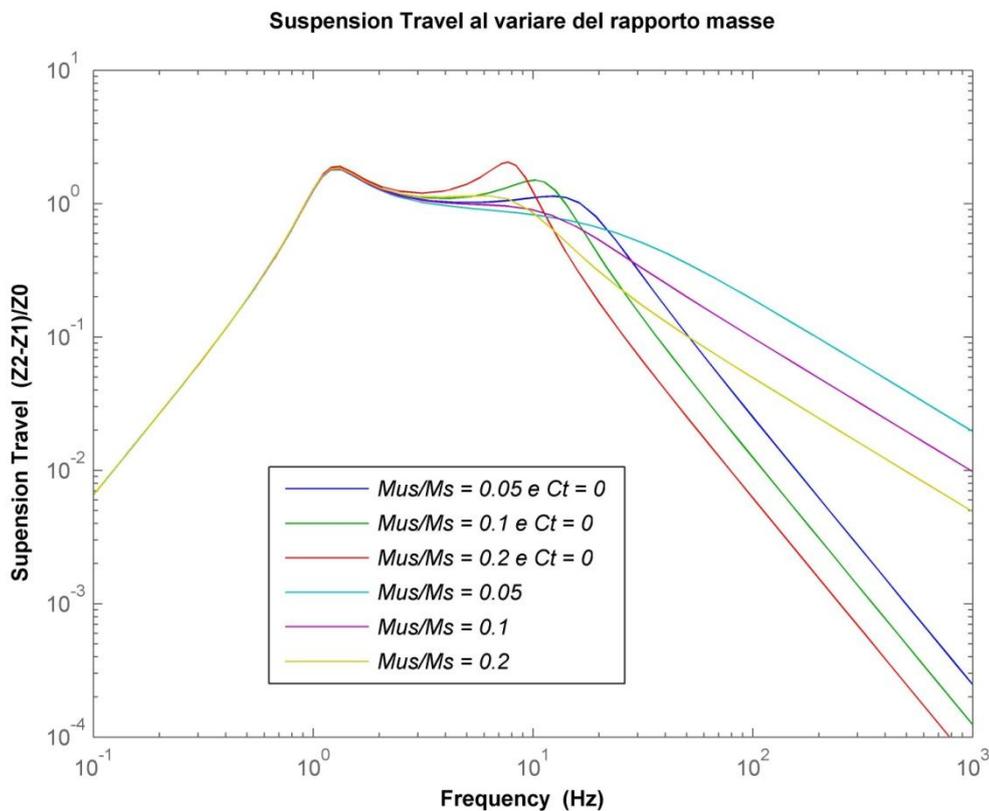
In questo caso le due frequenze naturali del sistema sono:

- $f_{n-s} = 1.17 \text{ Hz}$  frequenza naturale della massa sospesa;
- $f_{n-s} = 11.77 \text{ Hz}$  frequenza naturale della massa non sospesa.

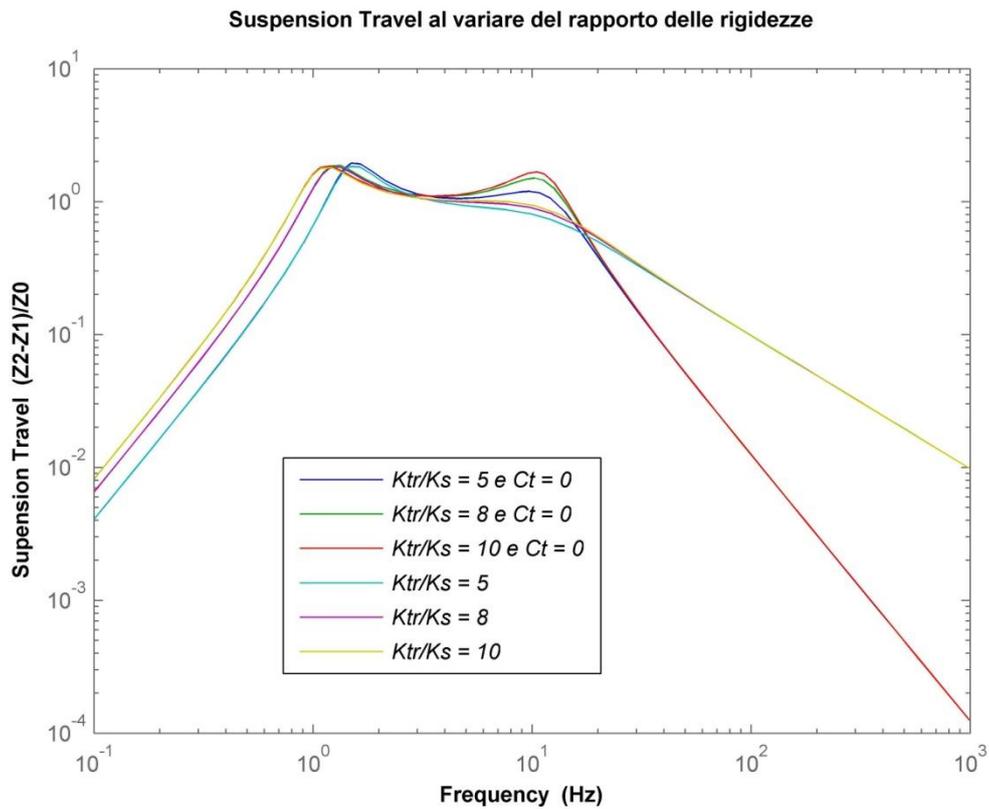
E' interessante notare che per tutto il range di frequenza che va da quella naturale della massa sospesa a quella naturale della massa non sospesa, più alto è il rapporto di smorzamento, più bassa sarà la suspension travel. Questo indica che per ridurre la suspension travel occorre un rapporto di smorzamento più alto.

### Suspension Travel con e senza smorzamento dello pneumatico

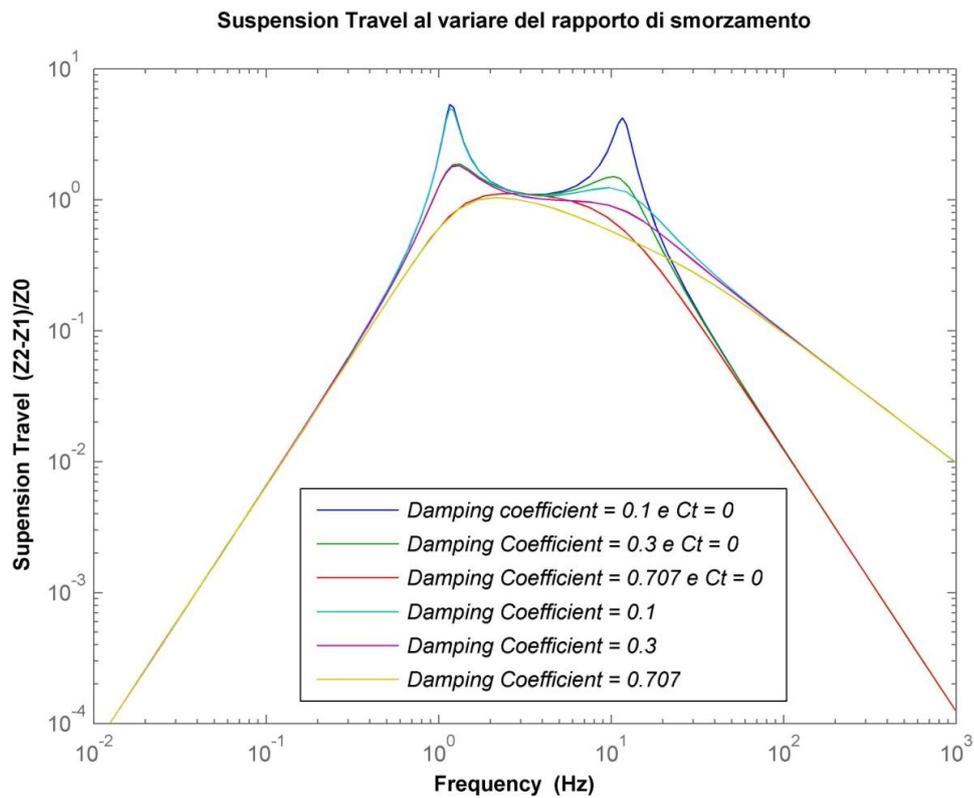
In questo caso si riportano i diagrammi delle tre analisi precedenti sulla suspension travel considerando anche il coefficiente di smorzamento dello pneumatico alla pressione di 2.45 bar.



**Figura 22:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle masse con e senza di smorzamento dello pneumatico.



**Figura 23:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle rigidzze con e senza smorzamento dello pneumatico.

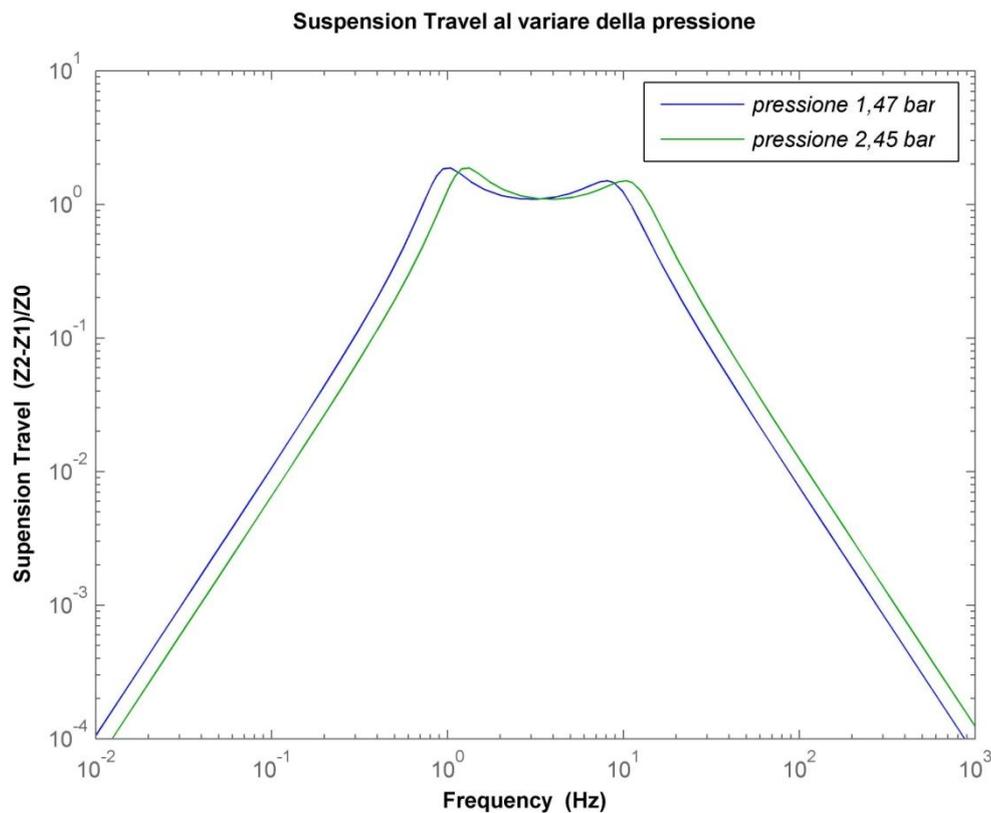


**Figura 24:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto di smorzamento con e senza smorzamento dello pneumatico.

Anche in questo caso valgono le stesse considerazioni fatte per la Figura 14, Figura 15 e Figura 16.

### Suspension Travel al variare della pressione

La Figura 25 mostra l'effetto della variazione della pressione sulla suspension travel del sistema considerato.



**Figura 25:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare della pressione in assenza di smorzamento dello pneumatico.

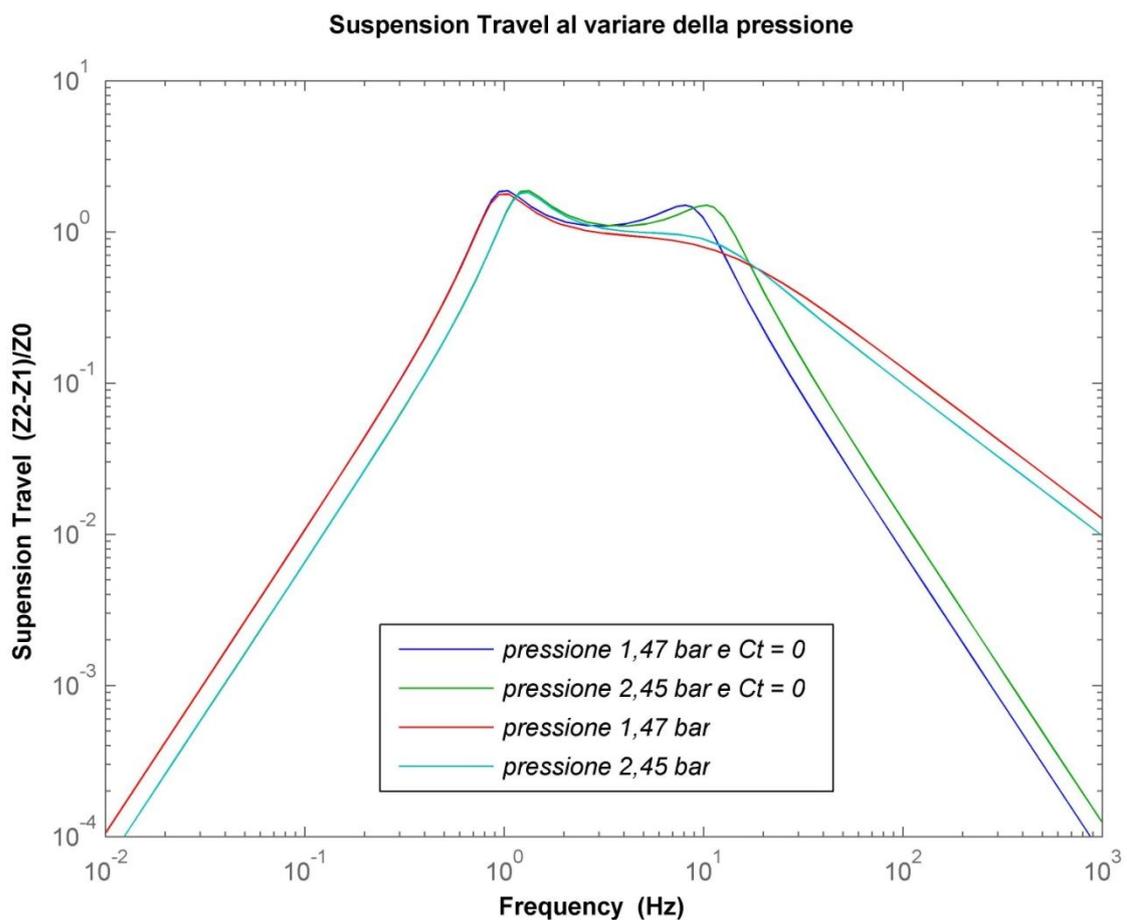
Come nel caso di Figura 17, anche qui la pressione dello pneumatico provoca solo uno slittamento della risposta in frequenza della suspension travel di pochi  $H_z$ , infatti le due frequenze naturali del sistema sono:

- $f_{n-s} = 0.92 H_z$     frequenza naturale della massa sospesa alla pressione di 1.47 bar;
- $f_{n-s} = 1.17 H_z$     frequenza naturale della massa sospesa alla pressione di 2.45 bar;

- $f_{n-s} = 9.23 H_z$       frequenza naturale della massa non sospesa alla pressione di 1.47 bar;
- $f_{n-s} = 11.77 H_z$       frequenza naturale della massa non sospesa alla pressione di 2.45 bar.

in assenza di smorzamento dello pneumatico.

La Figura 26 mostra la stessa analisi precedente considerando anche il coefficiente di smorzamento dello pneumatico alla pressione di 2.45 bar.



**Figura 26:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare della pressione con e senza smorzamento dello pneumatico.

### 2.3.4 Roadholding

Quando il veicolo vibra, una forza normale, che agisce tra lo pneumatico e la strada, fluttua. Dato che la forza in curva, la forza di trazione e la forza di frenata, sviluppate dallo pneumatico, sono legate al carico normale agente sullo pneumatico stesso, la vibrazione di quest'ultimo influenza la tenuta di strada (Roadholding), l'handling e le performance del veicolo [7].

La forza normale tra lo pneumatico e la strada durante la vibrazione può essere rappresentata dalla Dynamic tire deflection o dallo spostamento della massa non sospesa relativo alla superficie stradale.

La caratteristica intrinseca del sistema può essere descritta dalla seguente Funzione di Trasferimento:

$$\begin{aligned} \frac{(Z_0 - Z_2)}{Z_0}(s) &= \\ &= \frac{(m_s \cdot m_{us}) \cdot s^4 + (m_s \cdot c_{sh} + m_{us} \cdot c_{sh}) \cdot s^3 + (m_s \cdot k_s + m_{us} \cdot k_s) \cdot s^2}{(m_s \cdot m_{us}) \cdot s^4 + (m_s \cdot c_{sh} + m_s \cdot c_t + m_{us} \cdot c_{sh}) \cdot s^3 + (m_s \cdot k_s + m_s \cdot k_{tr} + c_{sh} \cdot c_t + m_{us} \cdot k_s) \cdot s^2 + (c_{sh} \cdot k_{tr} + c_t \cdot k_s) \cdot s + k_s \cdot k_{tr}} \end{aligned} \quad (26)$$

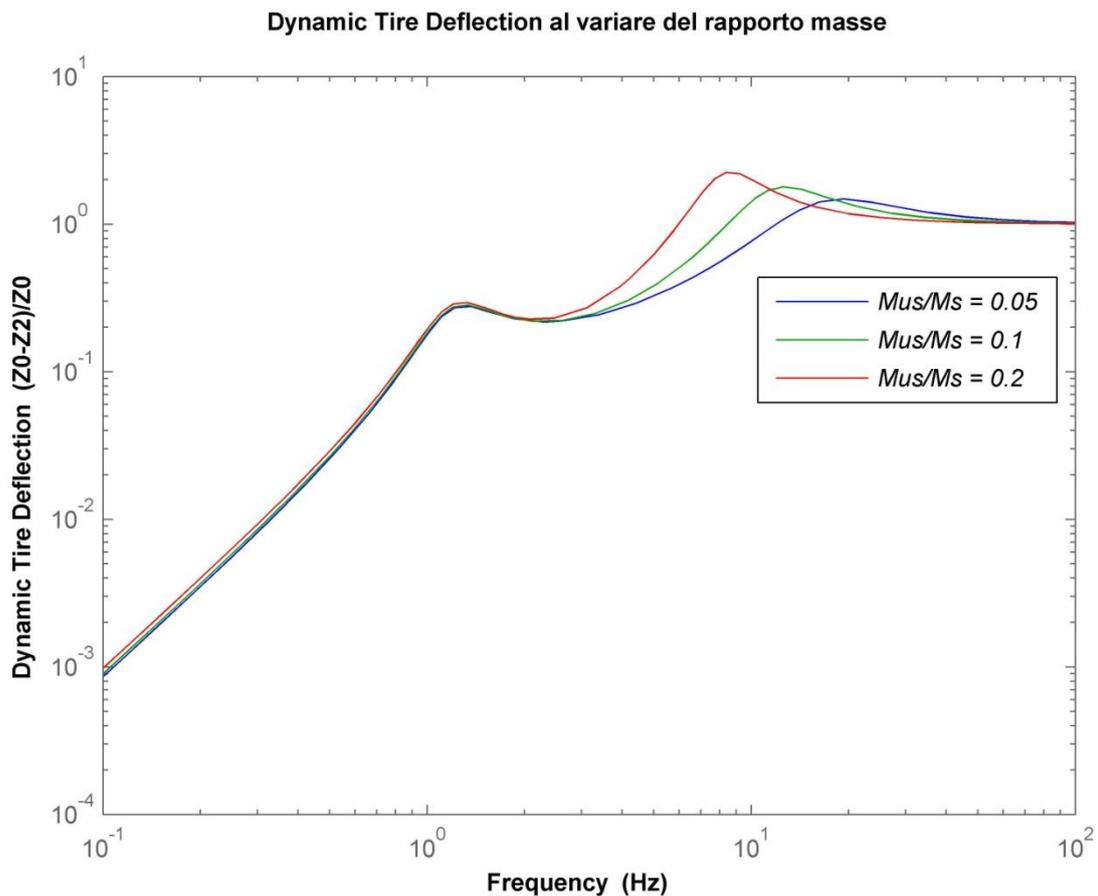
#### Dynamic tire deflection al variare del rapporto delle masse

Facendo riferimento ai dati in Tabella 2 e considerando uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, un rapporto di rigidezze pari a 8, uno smorzamento del sistema sospensivo pari a 0.3 e considerando inizialmente il coefficiente di smorzamento dello pneumatico nullo, l'equazione (26) diventa in termini numerici:

$$\begin{aligned} \frac{(Z_0 - Z_2)}{Z_0}(s) &= \\ &= \frac{1.033 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 1.015 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.318 \cdot 10^7 \cdot s^2}{1.033 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 1.015 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.136 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 4.699 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9} \end{aligned}$$

con un rapporto di masse pari a 0.05.

La Figura 27 mostra l'effetto del rapporto tra la massa non sospesa e la massa sospesa sulla dynamic tire deflection del sistema intesa come il rapporto dello spostamento massimo relativo tra la massa non sospesa e la superficie stradale ( $Z_0 - Z_2$ ) e l'ampiezza del profilo sinusoidale stradale  $Z_0$ .



**Figura 27:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle due masse in assenza di smorzamento dello pneumatico.

In questo caso le due frequenze naturali del sistema sono:

- $f_{n-s} = 1.17 H_z$  frequenza naturale della massa sospesa;
- $f_{n-s} = 16.65 H_z; 11.77 H_z; 8.32 H_z$  frequenza naturale della massa non sospesa  
rispettivamente al rapporto di masse  $\frac{m_{us}}{m_s} = 0.05; 0.10; 0.20$ .

E' possibile vedere che in un range di frequenza al di sotto della prima frequenza naturale, il rapporto delle masse ha un piccolo effetto sul roadholding. In un range di frequenza medio tra le due frequenze naturali, una massa non sospesa più leggera porta ad una più bassa dynamic tire deflection. In un range al di sopra della seconda frequenza naturale, la massa non sospesa ha un effetto relativamente insignificante sulla dynamic tire deflection. Si dovrebbe notare che se, durante la vibrazione, lo spostamento relativo tra la massa non sospesa e la superficie stradale è tale da consentire un totale recupero della deflessione statica dello pneumatico, la forza normale tra lo pneumatico stesso e la strada tenderà a zero oppure lo pneumatico sarà sul punto di rimbalzare da terra. Questa è una situazione indesiderata perché lo pneumatico non appena si stacca da terra, la tenuta di strada del veicolo diminuisce drasticamente.

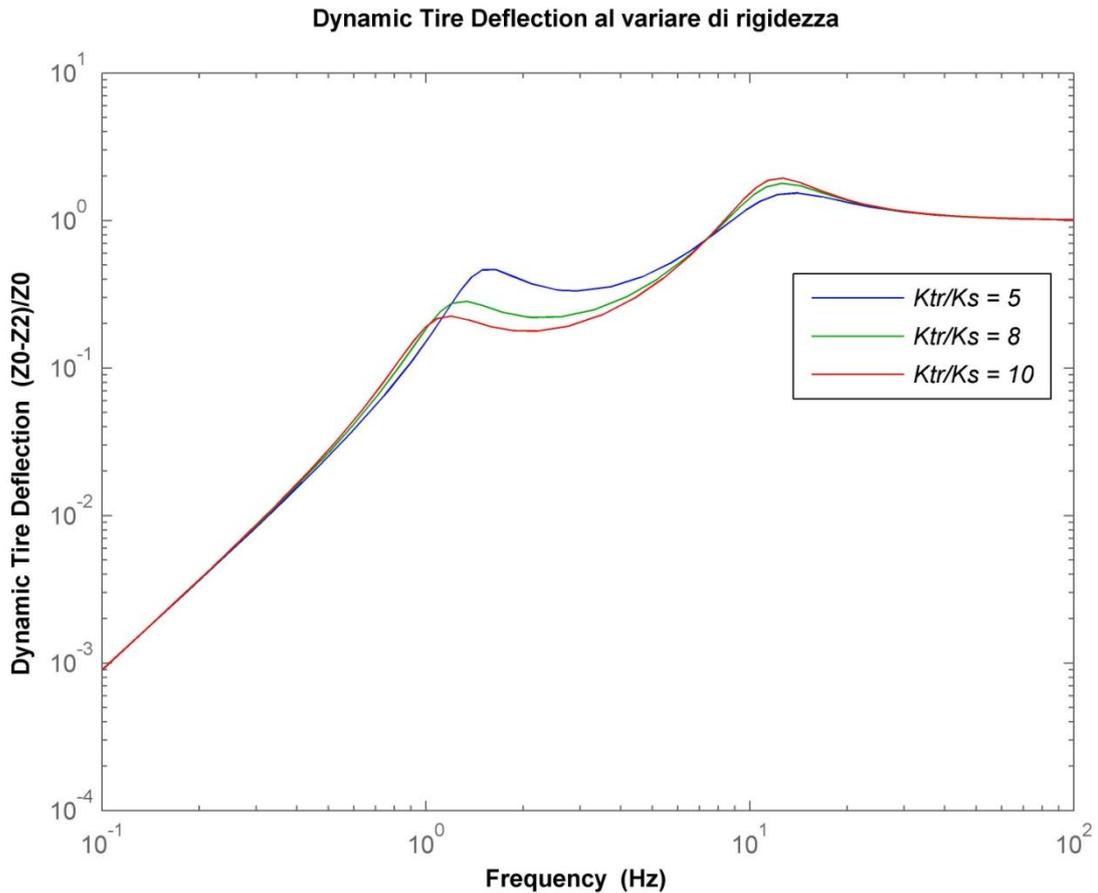
### **Dynamic Tire Deflection al variare del rapporto delle rigidzze**

Considerando uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, un rapporto delle masse pari a 0.1, uno smorzamento del sistema sospensivo pari a 0.3 e considerando inizialmente il coefficiente di smorzamento dello pneumatico nullo, l'equazione (26) diventa in termini numerici:

$$\frac{(Z_0 - Z_2)}{Z_0}(s) = \frac{2.066 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 1.344 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 2.21 \cdot 10^7 \cdot s^2}{2.066 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 1.344 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.225 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 5.943 \cdot 10^8 \cdot s + 9.768 \cdot 10^9}$$

con un rapporto di rigidzza pari a 5.

La Figura 28 mostra l'effetto del rapporto delle rigidzze sul roadholding del sistema considerato.



**Figura 28:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle due rigidzze in assenza di smorzamento dello pneumatico.

Le due frequenze naturali del sistema sono:

- $f_{n-s} = 1.43 H_z; 1.17 H_z; 1.06 H_z$  frequenze naturali della massa sospesa;
- $f_{n-s} = 12.16 H_z; 11.77 H_z; 11.64 H_z$  frequenze naturali della massa non sospesa

rispettivamente al rapporto di rigidzze  $\frac{k_{tr}}{k_s} = 5; 8; 10$ .

Si nota che per frequenze di eccitazione basse e alte, la rigidzza della sospensione ha un effetto relativamente insignificante sul roadholding, mentre in un range di frequenza tra la prima frequenza naturale e quella di crossover, una sospensione più morbida porta ad una più bassa tenuta di strada. Tuttavia, in un range di frequenza vicino alla seconda frequenza naturale, una sospensione più rigida porta ad un più basso roadholding e quindi una migliore tenuta di strada del veicolo.

Basato sui risultati appena descritti, una sospensione più morbida provvede a migliorare l'isolamento delle vibrazioni. Tuttavia, per raggiungere una buona tenuta di strada del veicolo ad una frequenza di eccitazione vicino a quella naturale della massa non sospesa, è preferibile avere una sospensione più rigida. Questa è la ragione per cui la sospensione per i veicoli da corsa è più rigida di quella dei veicoli da viaggio.

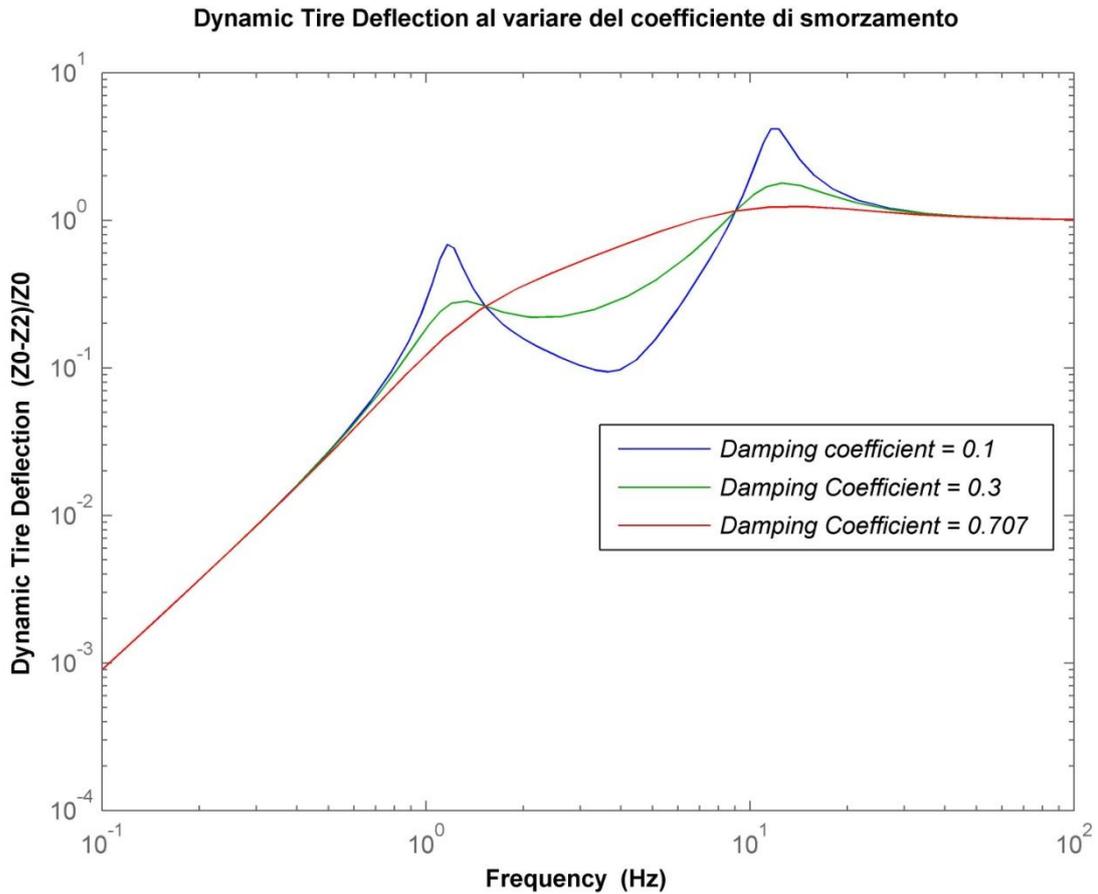
### **Dynamic Tire Deflection al variare del rapporto di smorzamento**

Con uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, un rapporto di rigidezze pari a 8, un rapporto delle masse pari a 0.1 e considerando inizialmente il coefficiente di smorzamento dello pneumatico nullo, l'equazione (26) diventa in termini numerici:

$$\frac{(Z_0 - Z_2)}{Z_0}(s) = \frac{2.066 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 3.543 \cdot 10^5 \cdot s^3 + 1.381 \cdot 10^7 \cdot s^2}{2.066 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 3.543 \cdot 10^5 \cdot s^3 + 1.143 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 1.566 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9}$$

considerando un rapporto di smorzamento pari a 0.1.

La Figura 29 mostra l'effetto del rapporto di smorzamento sulla tenuta di strada del sistema considerato.



**Figura 29:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto di smorzamento in assenza di smorzamento dello pneumatico.

In questo caso le due frequenze naturali del sistema sono:

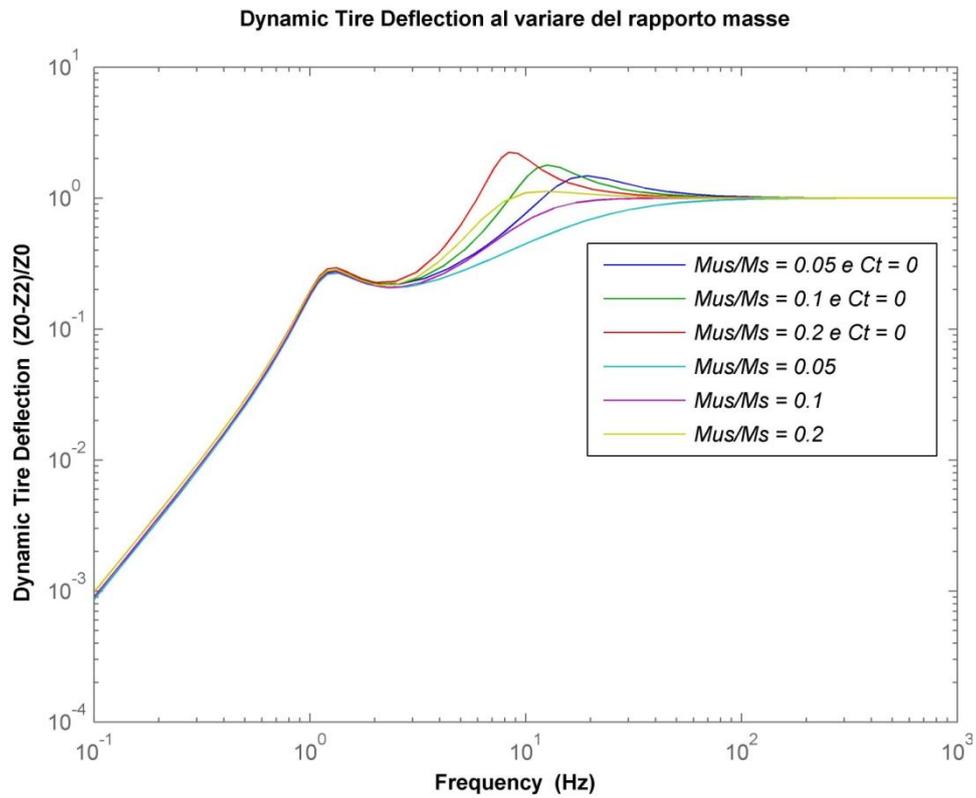
- $f_{n-s} = 1.17 H_z$  frequenza naturale della massa sospesa;
- $f_{n-s} = 11.77 H_z$  frequenza naturale della massa non sospesa.

Si nota che in un range di frequenza al di sotto della prima frequenza naturale o vicina alla seconda, per mantenere una buona tenuta di strada, è necessario uno smorzamento più elevato.

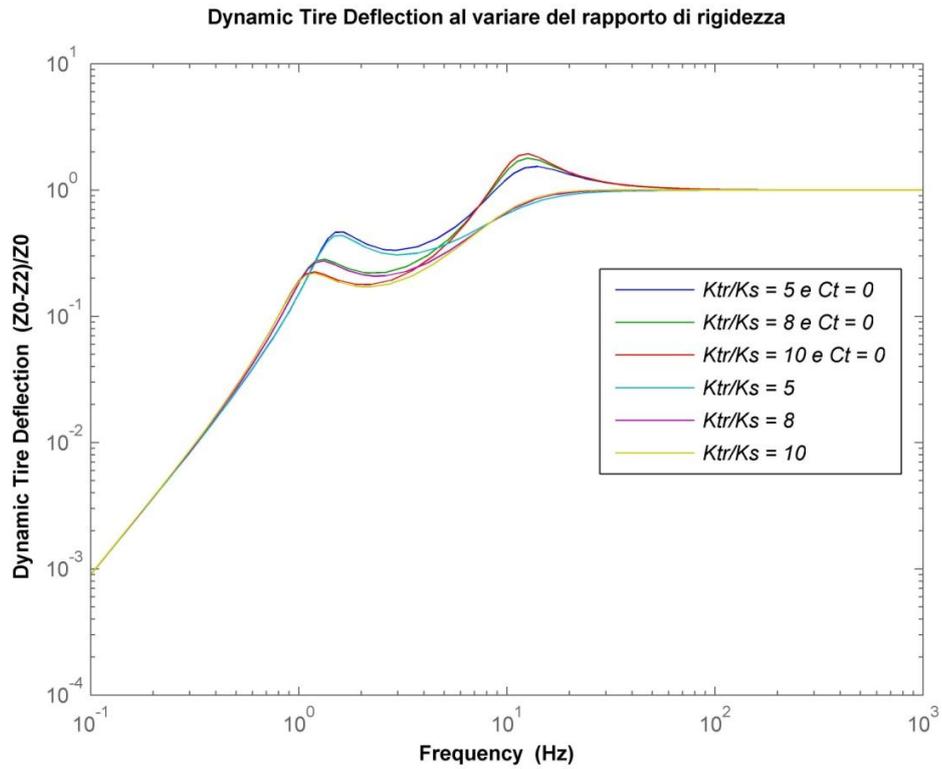
Tuttavia, in un range di frequenza medio tra le due frequenze naturali è preferibile uno smorzamento più basso.

### Dynamic Tire Deflection con e senza smorzamento dello pneumatico

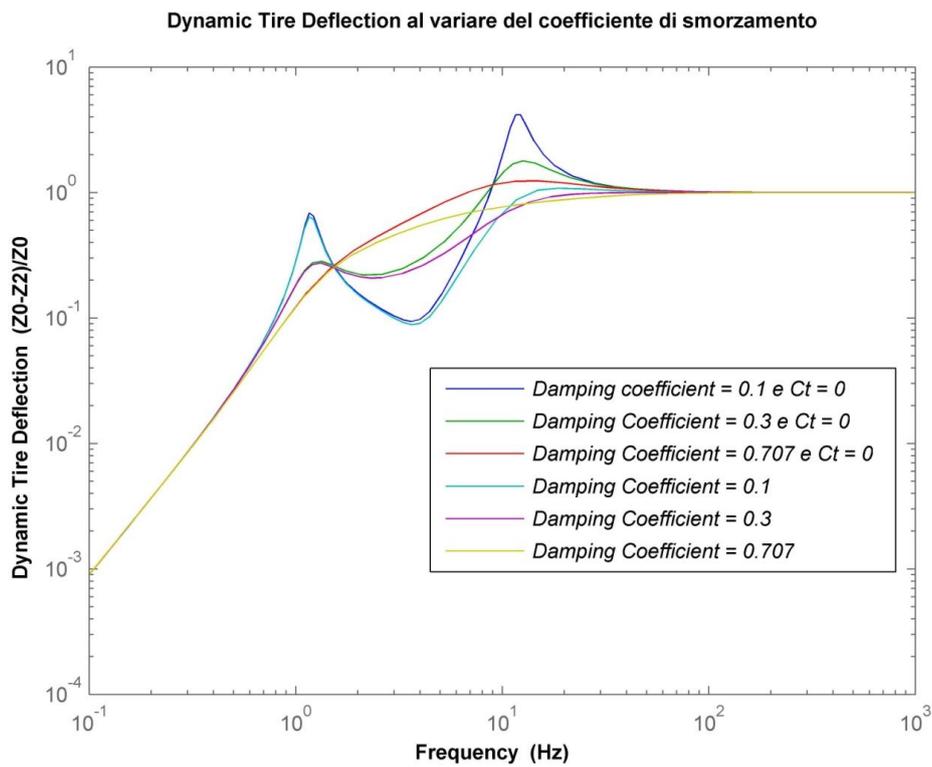
In questo caso si riportano i diagrammi delle tre analisi precedenti sulla suspension travel considerando anche il coefficiente di smorzamento dello pneumatico alla pressione di 2.45 bar.



**Figura 30:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle masse con e senza di smorzamento dello pneumatico.



**Figura 31:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle rigidzze con e senza smorzamento dello pneumatico.

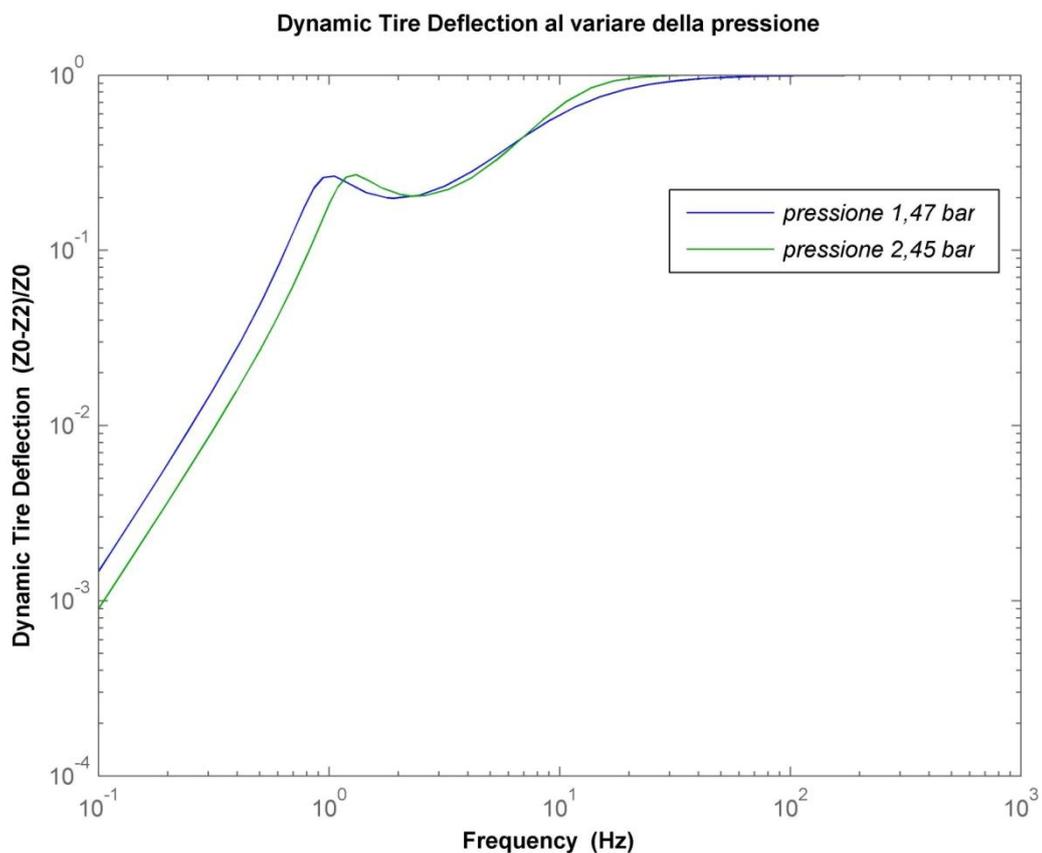


**Figura 32:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto di smorzamento con e senza smorzamento dello pneumatico.

Valgono le stesse considerazioni fatte nelle analisi precedenti in Figura 22, Figura 23 e Figura 24.

### Dynamic Tire Deflection al variare della pressione

La Figura 33 mostra l'effetto della variazione della pressione sulla dynamic tire deflection del sistema considerato.

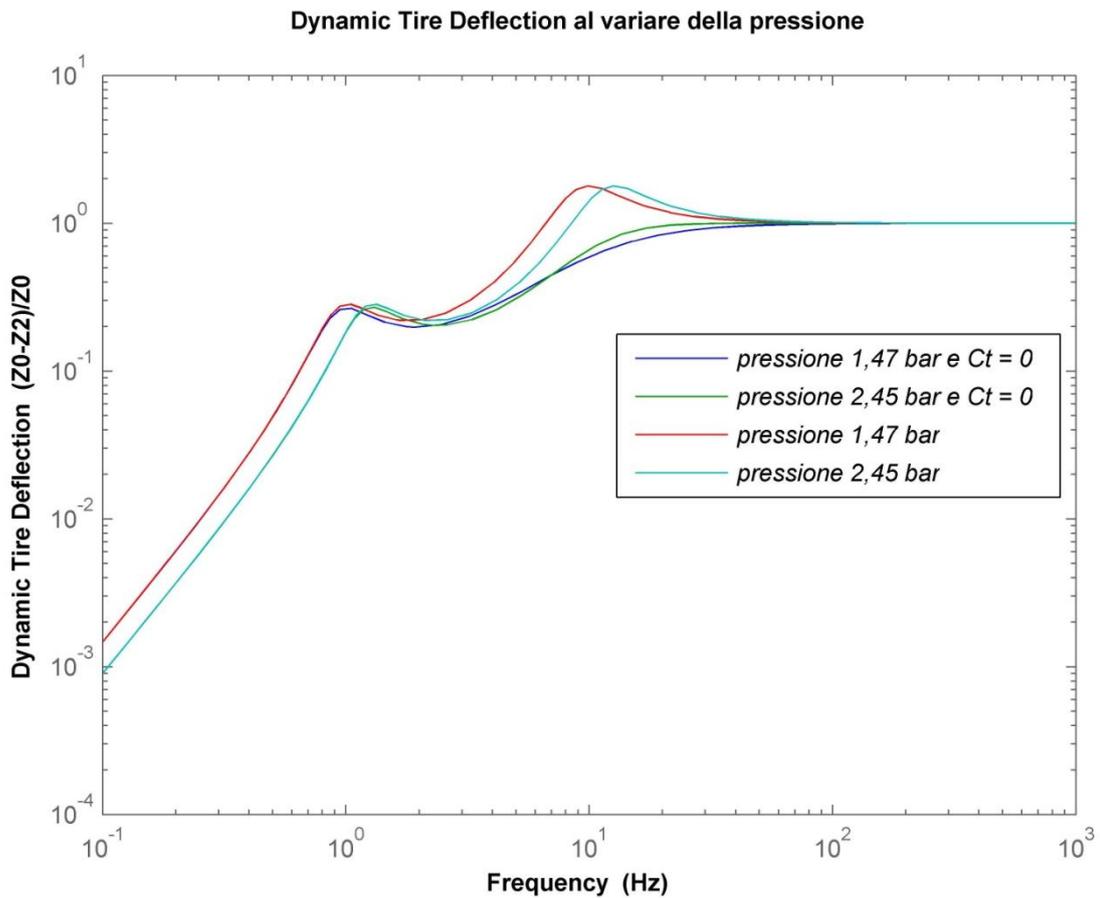


**Figura 33:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare della pressione in assenza di smorzamento dello pneumatico.

Si evince che la pressione dello pneumatico, per frequenze di eccitazione al di sotto della prima frequenza naturale, provoca solo uno slittamento della risposta in frequenza della dynamic tire deflection di pochi  $H_z$ , mentre in corrispondenza della seconda frequenza naturale si ha un lieve aumento della risposta del sistema.

Infine al di sopra della seconda frequenza naturale, la risposta del sistema è indipendente dalla variazione della pressione.

La Figura 34 mostra la stessa analisi precedente considerando anche il coefficiente di smorzamento dello pneumatico alla pressione di 2.45 bar.



**Figura 34:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare della pressione con e senza smorzamento dello pneumatico.

### 2.3.5 Analisi in frequenza dell'accelerazione della massa sospesa

In questo paragrafo si vuole analizzare il comportamento del sistema in termini di accelerazione per tutte le frequenze di eccitazione del sistema stesso.

Lo studio è analogo a quello eseguito nei paragrafi precedenti, con l'unica accortezza che l'uscita considerata non è più lo spostamento della massa sospesa bensì l'accelerazione.

Per tale motivo la Funzione di Trasferimento da prendere in considerazione è la seguente:

$$H_a(s) = \frac{\ddot{z}_1(s)}{z_0(s)} = s^2 \cdot \frac{z_1(s)}{z_0(s)} = s^2 \cdot H(s) \quad (27)$$

dove  $H(s)$  è la Funzione di Trasferimento descritta dall'equazione (24). Quindi la  $H_a(s)$  diventa:

$$H_a(s) = \frac{(c_{sh} \cdot c_t) \cdot s^4 + (c_{sh} \cdot k_{tr} + c_t \cdot k_s) \cdot s^3 + (k_s \cdot k_{tr}) \cdot s^2}{(m_s \cdot m_{us}) \cdot s^4 + (m_s \cdot c_{sh} + m_s \cdot c_t + m_{us} \cdot c_{sh}) \cdot s^3 + (m_s \cdot k_s + m_s \cdot k_{tr} + c_{sh} \cdot c_t + m_{us} \cdot k_s) \cdot s^2 + (c_{sh} \cdot k_{tr} + c_t \cdot k_s) \cdot s + k_s \cdot k_{tr}} \quad (28)$$

#### **Accelerazione massa sospesa al variare del rapporto delle masse**

Facendo riferimento ai dati in Tabella 2 e considerando uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, un rapporto di rigidezze pari a 8, uno smorzamento del sistema sospensivo pari a 0.3 e considerando il coefficiente di smorzamento dello pneumatico nullo, l'equazione (28) diventa in termini numerici:

$$H_a(s) = \frac{4.699 \cdot 10^8 \cdot s^3 + 6.105 \cdot 10^9 \cdot s^2}{1.033 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 1.015 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.136 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 4.699 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9}$$

considerando un rapporto di masse pari a 0.05.

La Figura 35 mostra la trasmissibilità in termini di accelerazione della massa sospesa al variare del rapporto delle masse.

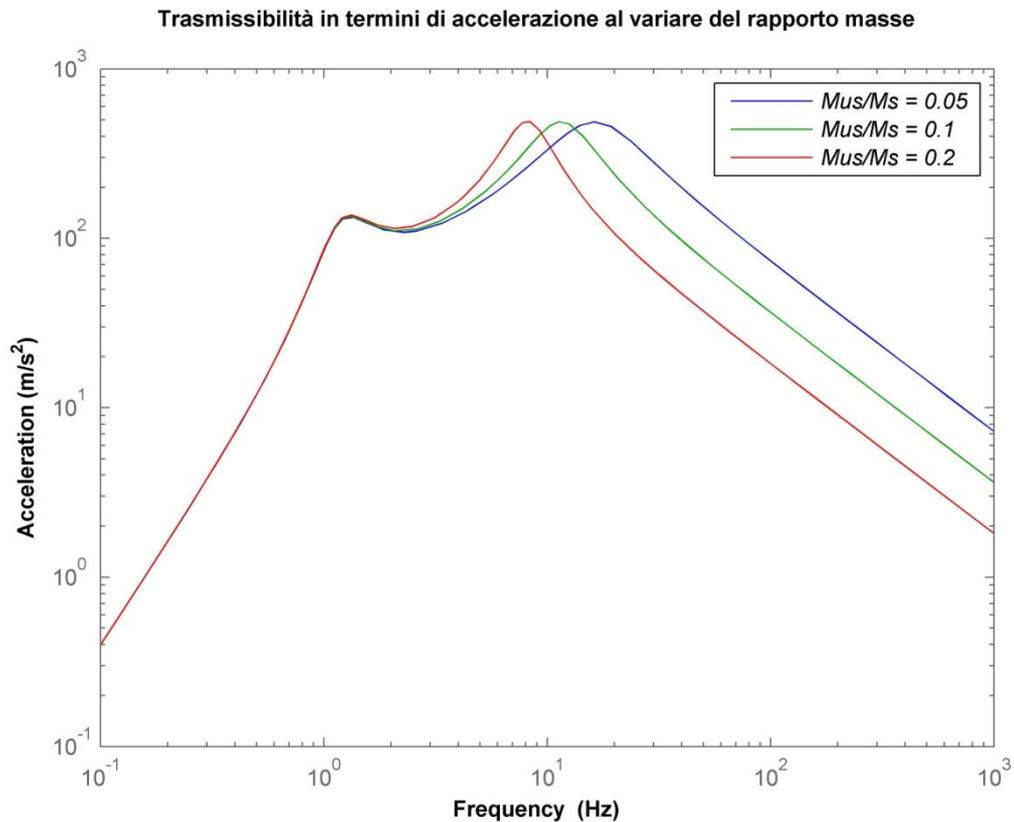


Figura 35: Trasmissibilità in termini di accelerazione al variare del rapporto delle masse.

Dalla figura si evince come la variazione del rapporto delle masse influenza soltanto la seconda frequenza naturale del sistema (quella relativa alla massa non sospesa), infatti all'aumentare di tale rapporto, il secondo picco si sposta verso sinistra.

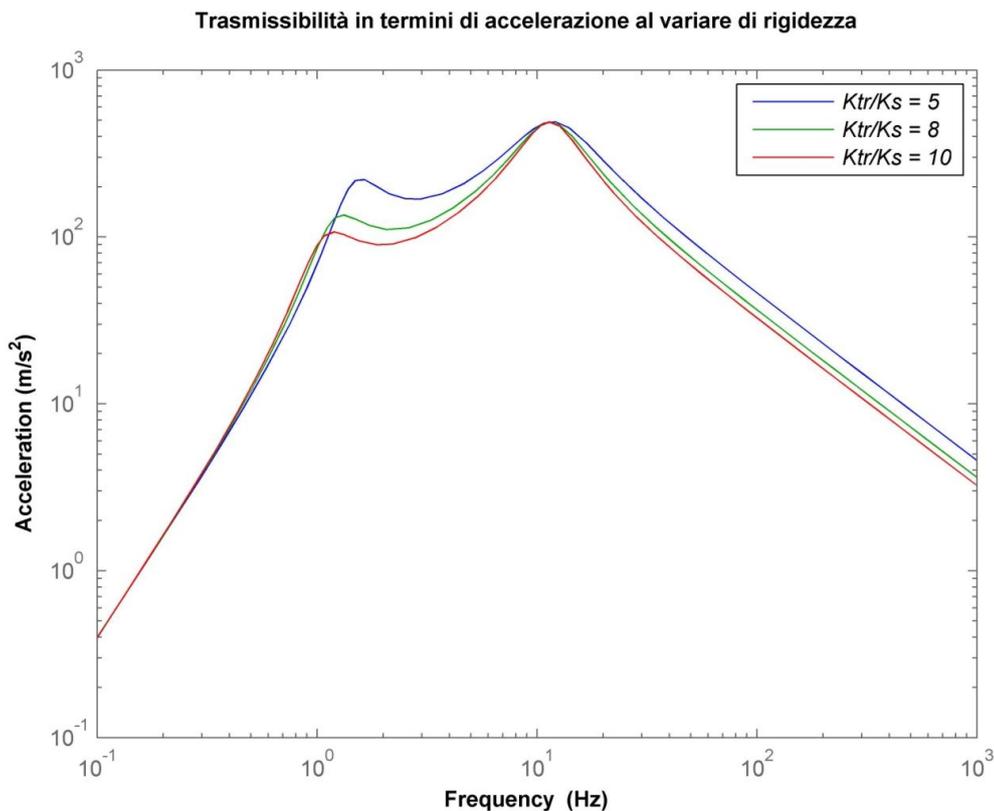
### Accelerazione massa sospesa al variare del rapporto delle rigidità

Anche in questo caso considerando uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, un rapporto delle masse pari a 0.1, uno smorzamento del sistema sospensivo pari a 0.3 e considerando il coefficiente di smorzamento dello pneumatico nullo, l'equazione (28) diventa in termini numerici:

$$H_a(s) = \frac{5.943 \cdot 10^8 \cdot s^3 + 9.768 \cdot 10^9 \cdot s^2}{2.066 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 1.344 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.225 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 5.943 \cdot 10^8 \cdot s + 9.768 \cdot 10^9}$$

con un rapporto delle rigidità pari a 5.

La Figura 36 mostra l'effetto del rapporto delle rigidità sull'accelerazione in uscita al sistema considerato.



**Figura 36:** Trasmissibilità in termini di accelerazione al variare del rapporto di rigidità.

Si evince che, a parità di rigidità della massa non sospesa  $k_{tr}$ , una sospensione più morbida migliora l'isolamento delle vibrazioni e quindi diminuisce l'accelerazione della massa sospesa.

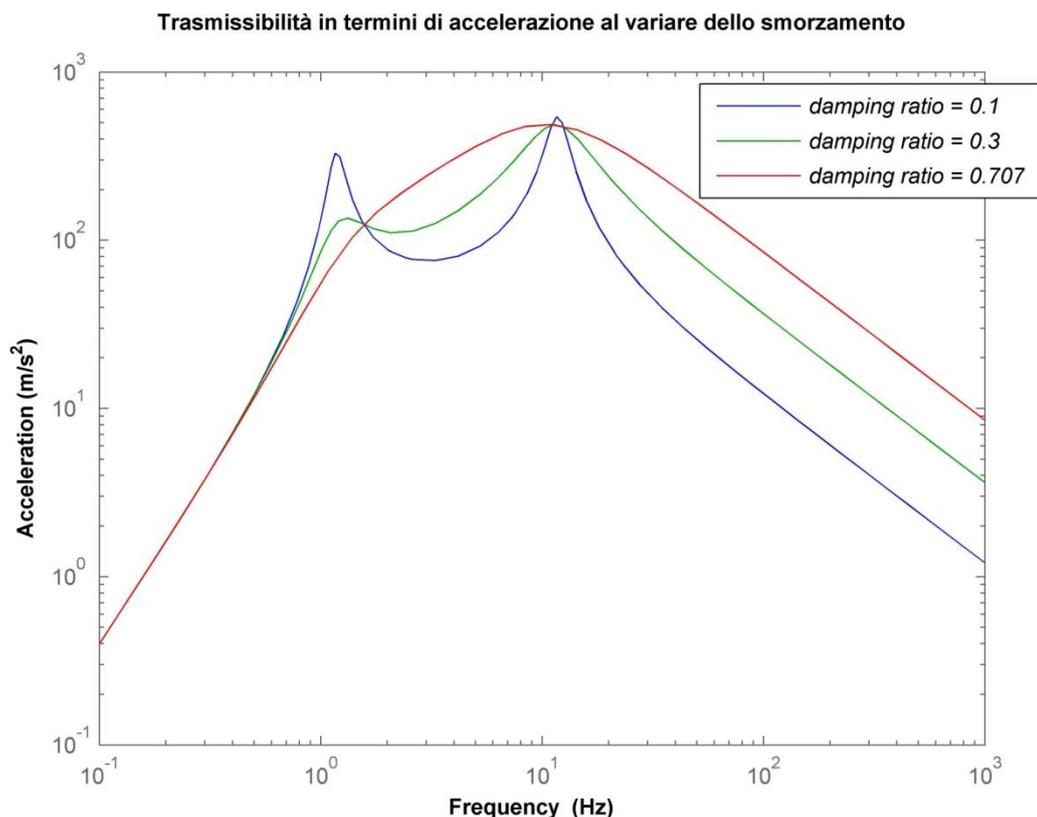
### Accelerazione massa sospesa al variare del rapporto di smorzamento

Con uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, un rapporto di rigidità pari a 8, un rapporto delle masse pari a 0.1 e considerando il coefficiente di smorzamento dello pneumatico nullo, l'equazione (28) diventa in termini numerici:

$$H_a(s) = \frac{1.566 \cdot 10^8 \cdot s^3 + 6.105 \cdot 10^9 \cdot s^2}{2.066 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 3.543 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.143 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 1.566 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9}$$

considerando un rapporto di smorzamento pari a 0.1.

La Figura 37 mostra l'effetto del rapporto di smorzamento sulla trasmissibilità del sistema considerato.



**Figura 37:** Trasmissibilità in termini di accelerazione al variare dello smorzamento del sistema sospensivo.

In questo caso all'aumentare dello smorzamento del sistema sospensivo il picco di risonanza della prima frequenza naturale diminuisce quindi in un range di frequenze medio-basse diminuisce l'accelerazione della massa sospesa. In un range di frequenza che va dalla prima frequenza naturale in poi, un aumento dello smorzamento del sistema provoca un piccolo aumento dell'accelerazione della massa sospesa [7].

### Accelerazione massa sospesa al variare della pressione

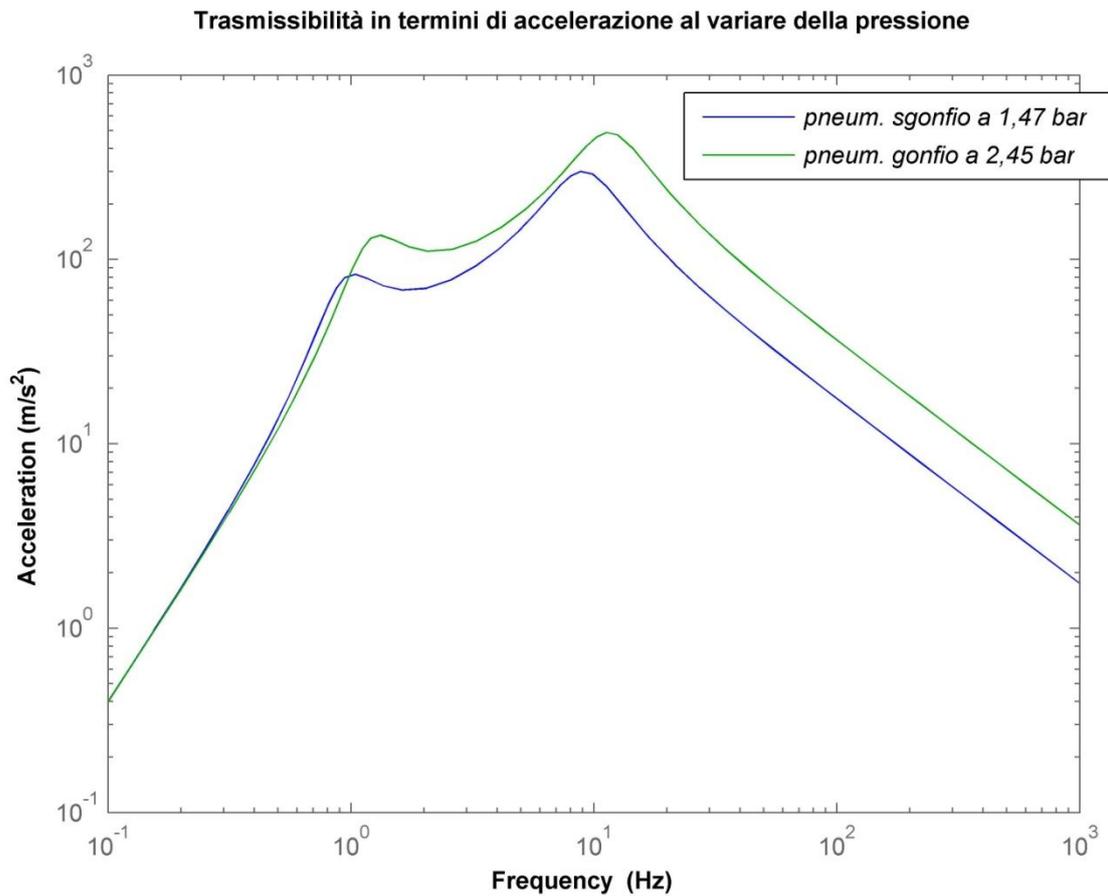
In questo caso si effettua l'analisi in frequenza della trasmissibilità in termini di accelerazione al variare solo della pressione con un rapporto di masse pari a 0.1, un rapporto di rigidità pari a 8 e un rapporto di smorzamento pari a 0.3.

Facendo sempre riferimento ai dati in Tabella 2 l'equazione (28) risulta:

$$H_a(s) = \frac{4.699 \cdot 10^8 \cdot s^3 + 6.105 \cdot 10^9 \cdot s^2}{2.066 \cdot 10^4 \cdot s^4 + 1.063 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 1.143 \cdot 10^8 \cdot s^2 + 4.699 \cdot 10^8 \cdot s + 6.105 \cdot 10^9}$$

considerando una pressione di 2.45 bar e quindi uno pneumatico gonfio.

La Figura 38 mostra l'effetto della variazione della pressione sull'accelerazione in uscita al sistema considerato.



**Figura 38:** *Trasmissibilità in termini di accelerazione al variare della pressione di gonfiaggio.*

Dalla figura si evince come la variazione della pressione di gonfiaggio influisce sulla trasmissibilità in termini di accelerazione del sistema. Infatti un aumento della pressione provoca sia uno slittamento della curva a destra che un aumento dell'accelerazione in uscita del sistema [7].

I relativi codici in MATLAB sono inseriti nell'*Appendice B*.

### 3. Modello ad 1/4 di veicolo in ambiente MSC ADAMS

Il modello ad 1/4 di veicolo studiato per via analitica nel Capitolo 2 è stato analizzato mediante il software di simulazione cineto-dinamica, MSC ADAMS 2005, con l'obiettivo di validare i risultati analitici sviluppando allo stesso tempo un modello più "fisico" di tipo multicorpo. Tale modello ha consentito di modellare il contatto ruota strada consentendo di ottenere un comportamento più fedele rispetto al sistema reale.

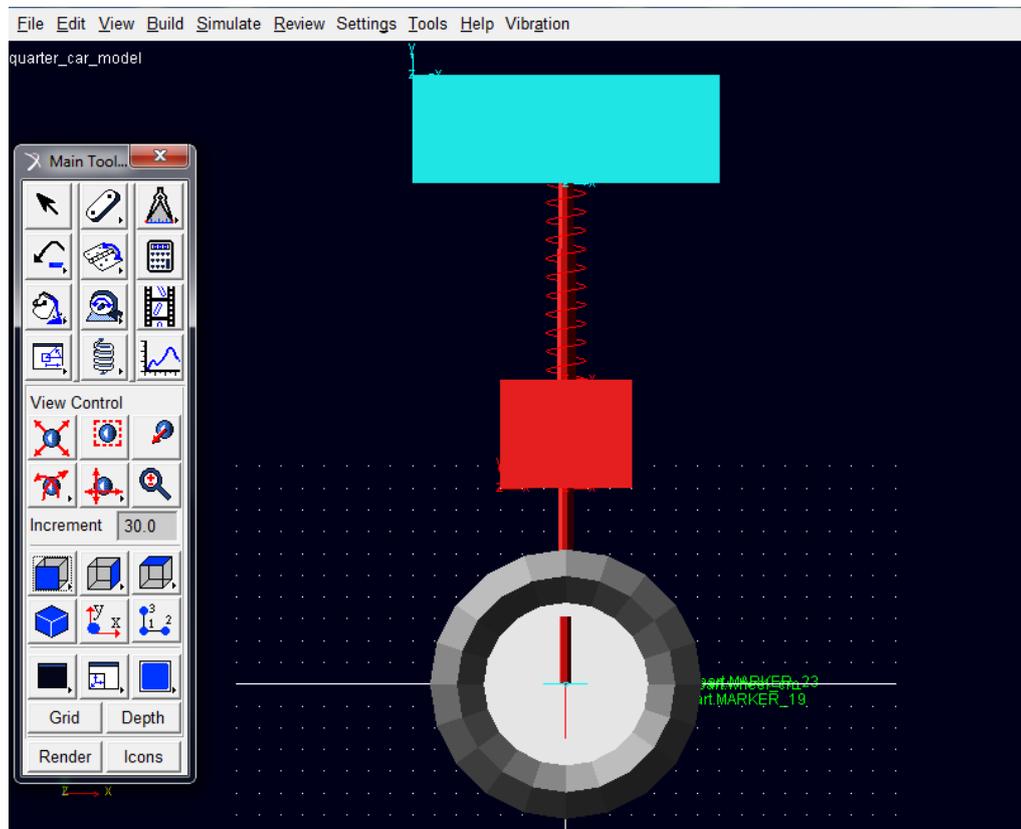
#### *3.1 Introduzione Software MSC ADAMS*

In particolare è un MultiBody Dynamics (MBD) software il quale permette di analizzare e studiare, in modo veloce e accurato, le dinamiche delle parti in movimento, come carichi e forze che sono distribuite in tutti i sistemi meccanici, e migliora e ottimizza le performance di tutti i prodotti. A differenza di molti strumenti CAD, considera tutte le condizioni fisiche reali risolvendo simultaneamente le equazioni cinematiche, statiche, quasi statiche e dinamiche. Utilizzando la soluzione tecnologica Multibody Dynamics, Adams esegue anche la dinamica non lineare in una piccola frazione del tempo richiesto dalle soluzioni FEA. I carichi e le forze, calcolate dalle simulazioni in MSC ADAMS, migliorano l'accuratezza di FEA, fornendo una migliore valutazione di come questi carichi e forze variano nel corso di una vasta gamma di ambienti di movimento e di funzionamento [8].

### 3.2 Realizzazione e studio del modello in MSC ADAMS

#### Considerazioni modello di ¼ veicolo in ambiente MSC ADAMS

La Figura 39 rappresenta il modello analizzato in ambiente MSC ADAMS.



**Figura 39:** Modello di ¼ di veicolo in ambiente MSC ADAMS.

Tale modello è sempre a 2 gradi di libertà composto da una massa sospesa (in blu), collegata attraverso un accoppiamento prismatico ed un elemento elasto-viscoso, che simula il sistema sospensivo, ad una massa non sospesa (in rosso + lo pneumatico) . Infine lo pneumatico presenta, a sua volta, una rigidità e uno smorzamento. Da notare che lo pneumatico e la massa in rosso sono collegate tra loro attraverso un accoppiamento (asta) completamente rigido in modo tale che siano solidali l'uno rispetto all'altro.

La differenza tra i due modelli di Figura 5 e Figura 39, è che quello analizzato in MSC ADAMS considera le caratteristiche reali della ruota.

### *3.3 Tipologia di pneumatici*

La tipologia di pneumatico utilizzato, per le simulazioni in MSC ADAMS/VIEW, è il modello ruota Pac2002 Magic-Formula che è stato sviluppato dalla MSC software facendo riferimento al testo "Tyre and Vehicle Dynamics" scritto da Pacejka.

#### **Modellazione delle forze di interazione tra strada-pneumatico**

Per le applicazioni dinamiche di un veicolo, un'accurata conoscenza delle forze d'interazione tra strada e pneumatico è indispensabile dato che il comportamento del veicolo dipende, in primis, da tali forze. Quest'ultime, a loro volta, dipendono dalle proprietà dello pneumatico e della strada, e dal movimento dello pneumatico stesso rispetto al profilo stradale [9].

La Figura 40 mostra le variabili input e output del modello ruota Pac2002 il quale può essere rappresentato nell'Adams/Solver attraverso l'STI (Standard Tire Interface). Gli input attraverso l'STI consistono in:

- posizione e velocità del centro della ruota;
- orientazione della ruota;
- parametri del modello ruota;
- parametri della strada.

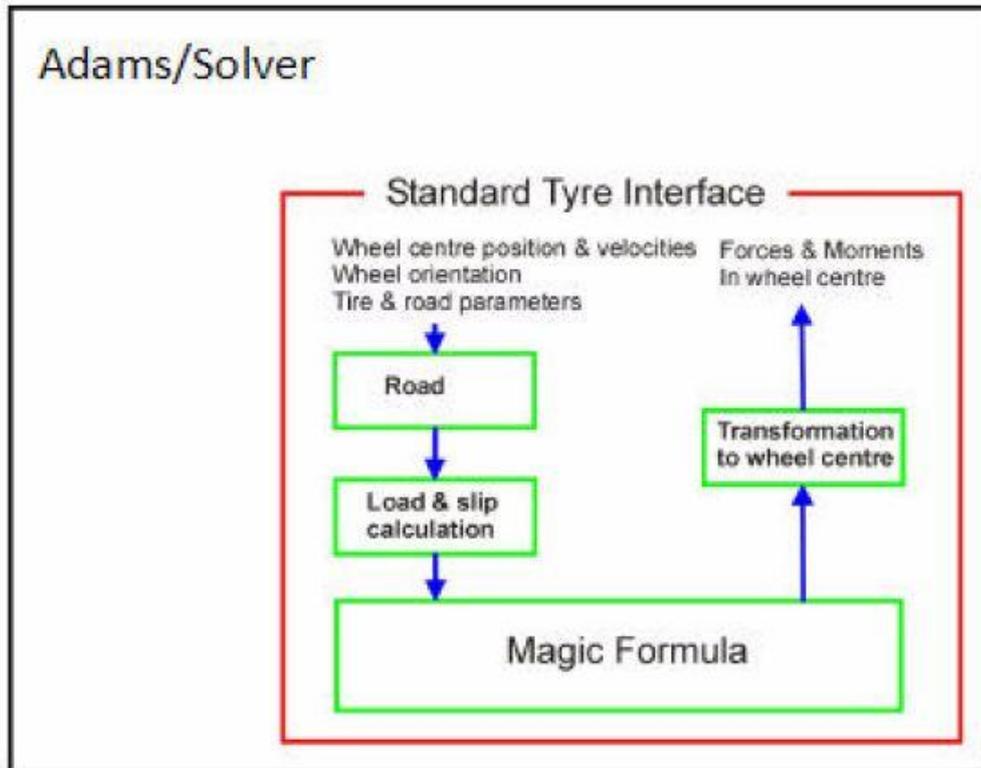


Figura 40: STI di uno pneumatico in Adams/Solver.

Questa routine calcola il carico verticale e la quantità di slittamenti basati sulla posizione e la velocità della ruota rispetto al profilo stradale. Gli input del MF consistono nel carico della ruota ( $F_z$ ), lo slittamento laterale e longitudinale ( $\kappa$ ,  $\alpha$ ), e l'angolo di inclinazione ( $\gamma$ ) con la strada. Gli output sono le forze ( $F_x$ ,  $F_y$ ) e i momenti ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) nel punto di contatto tra la ruota e la strada, come mostrato in Figura 41. Per calcolare queste forze, l'equazioni del modello MF usano un set di parametri, i quali derivano dal *tire testing data*.

Le forze e i momenti fuori dal MF sono trasferiti al centro della ruota e ritornano all'Adams/Solver attraverso l'STI [10].

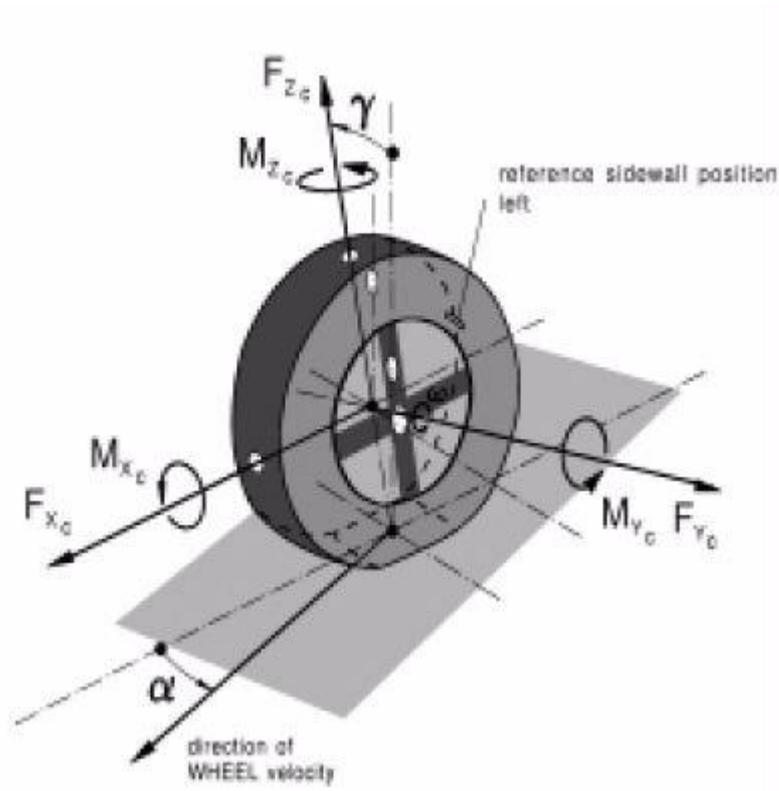
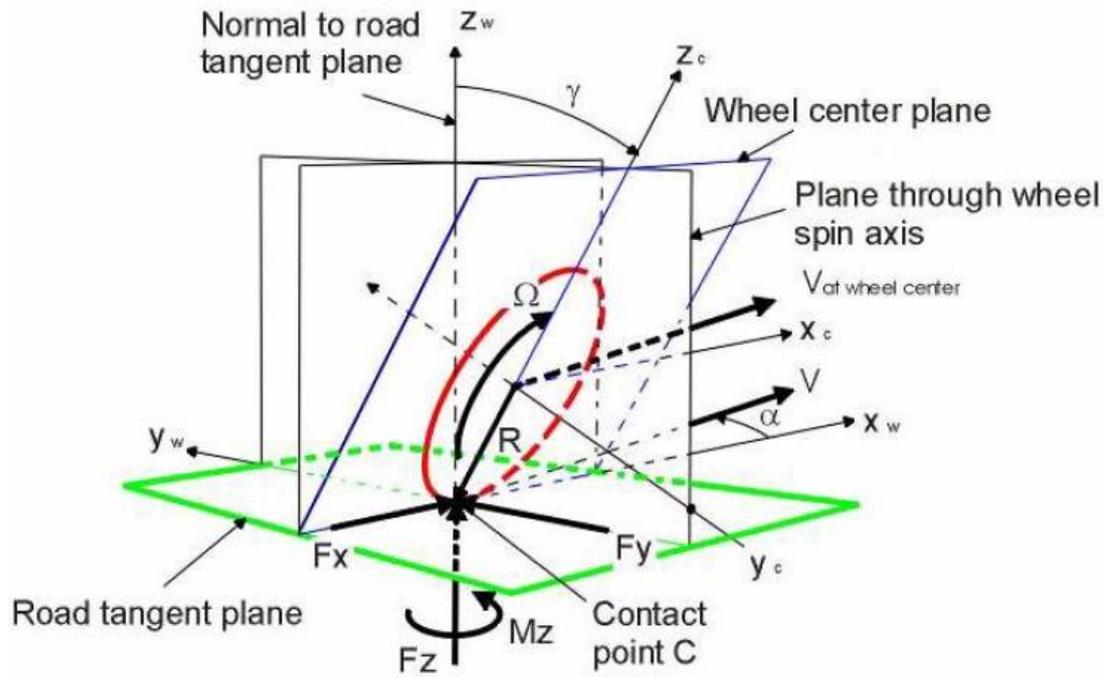


Figura 41: Schema di uno pneumatico Pac2002 MF.

### Contatto strada-pneumatico

Nella direzione verticale, il modello MF considera lo pneumatico come una molla e uno smorzatore lineari e paralleli in contatto con un punto del profilo stradale. Il punto di contatto è determinato considerando lo pneumatico e la ruota come un disco rigido. In tale punto, le forze di contatto nella direzione longitudinale e laterale dipendono fortemente dallo slittamento tra gli elementi dello pneumatico e della strada. Questo è valido per ostacoli stradali con una lunghezza d'onda più grande del raggio della ruota.

Per calcolare la cinematica dello pneumatico, la strada può essere considerata come il piano tangente al punto di contatto dello pneumatico stesso, come mostrato nella seguente figura:



**Figura 42:** *Punto di contatto ruota-strada.*

Il punto di contatto è determinato dalla linea di intersezione del centro ruota-piano con il piano tangente stradale e la linea di intersezione del centro ruota-piano con il piano che contiene l'asse di rotazione della ruota passante per il suo centro [10].

### 3.4 Verifica statica

Il primo passo è quello di eseguire una verifica statica del modello, per dimostrare che è un sistema a due gradi di libertà e che rispetti tutti i parametri impostati a monte della verifica.

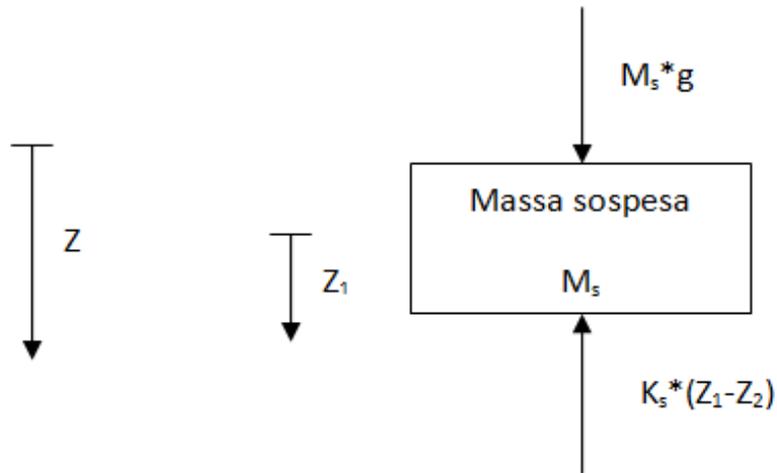
Nella seguente tabella sono riportati i dati in ingresso del modello utilizzati in MSC ADAMS/VIEW:

Massa sospesa (in blu)	$m_s = 454.5 \text{ kg}$
Massa non sospesa (in rosso)	$m_{us1} = 22.725 \text{ kg}$
Massa dello pneumatico	$m_{us2} = 22.725 \text{ kg}$
Coefficiente di rigidezza di uno pneumatico gonfio (2,45 bar)	$k_{tr} = 221 \text{ kN/m}$
Coefficiente di rigidezza della sospensione del veicolo	$k_s = 27625 \text{ N/m}$
Coefficiente di smorzamento del sistema sospensivo	$c_{sh} = 2126 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

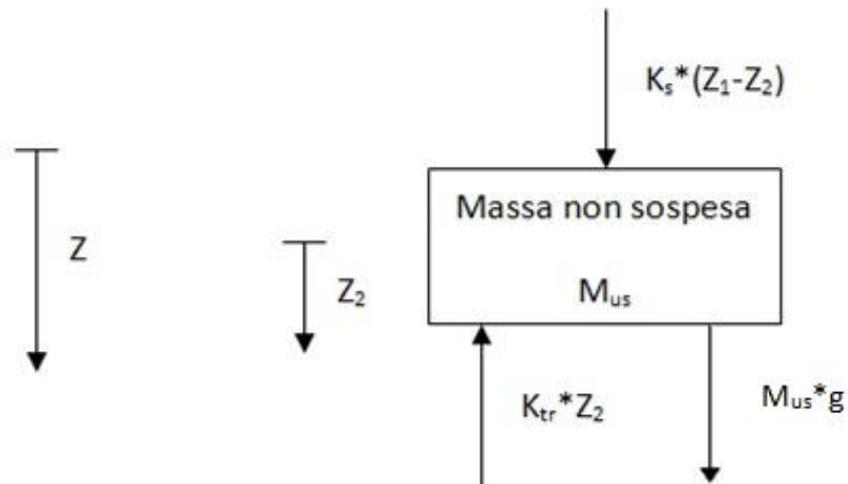
**Tabella 3:** Dati in ingresso del modello in ambiente Adams/View.

In questo caso lo pneumatico utilizzato presenta un raggio  $R = 290 \text{ mm}$  (non caricato), una larghezza del battistrada pari a  $175 \text{ mm}$ , un rapporto d'aspetto pari a  $0.7$  e inoltre si considera lo smorzamento dello pneumatico nullo. Per effettuare tale verifica si utilizza una superficie stradale completamente piatta di tipo "flat".

Sono riportati successivamente gli schemi di corpo libero del modello utilizzato:



**Figura 43:** Schema di corpo libero della massa sospesa.



**Figura 44:** Schema di corpo libero della massa non sospesa composta dalla massa in rosso e lo pneumatico.

Imponendo l'equilibrio verticale sulla Figura 43 e Figura 44 si ottengono le seguenti equazioni:

$$- M_s \cdot g = K_s \cdot (z_1 - z_2) \quad (29)$$

$$- M_{us} \cdot g = -K_s \cdot (z_1 - z_2) + K_{tr} \cdot z_2 \quad (30)$$

### Verifica 1

Dalla simulazione in MSC ADAMS, sullo pneumatico agisce una forza verticale pari a  $F = 4902.835 \text{ N}$ .

Analiticamente la massa totale che agisce sullo pneumatico è:

$$M_{tot} = M_s + M_{us1} + M_{us2} = 454.5 + 22.725 + 22.725 = 499,95 \text{ kg} \cong 4902 \text{ N}$$

### Verifica 2

Dalla simulazione in MSC ADAMS, la massa sospesa si sposta verso il basso di una quantità

$$\Delta_z = 0.162 \text{ m} \text{ con } \Delta_z = z_1 - z_2.$$

Analiticamente dalla (29) si ottiene:

$$k_s = \frac{M_s \cdot g}{\Delta_z} = 27522 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cong 27625 \text{ N/m}$$

### Verifica 3

Dalla simulazione in MSC ADAMS, la massa non sospesa si sposta verso il basso di  $z_2 =$

$$0.0222 \text{ m}$$

Analiticamente si ottiene:

$$z_1 = \Delta_z + z_2 = 0.1842 \text{ m}$$

$$k_{tr} = \frac{M_{us} \cdot g + k_s \cdot \Delta_z}{z_2} = 220,92 \frac{\text{KN}}{\text{m}} \cong 221 \text{ KN/m}$$

Dai risultati precedenti, le tre verifiche sono soddisfatte per cui il modello di Figura 39 preso in considerazione rispecchia quello studiato in ambiente MATLAB.

### 3.5 Vibration Isolation

Facendo riferimento al modello di Figura 39, alla Tabella 4 e considerando due tipologie di pneumatici chiamati "*pac2002\_175\_70R13 - 2.45\_bar*" e "*pac2002\_175\_70R13 - 1.47\_bar*", è possibile fare un confronto con i risultati ottenuti e descritti nei paragrafi precedenti.

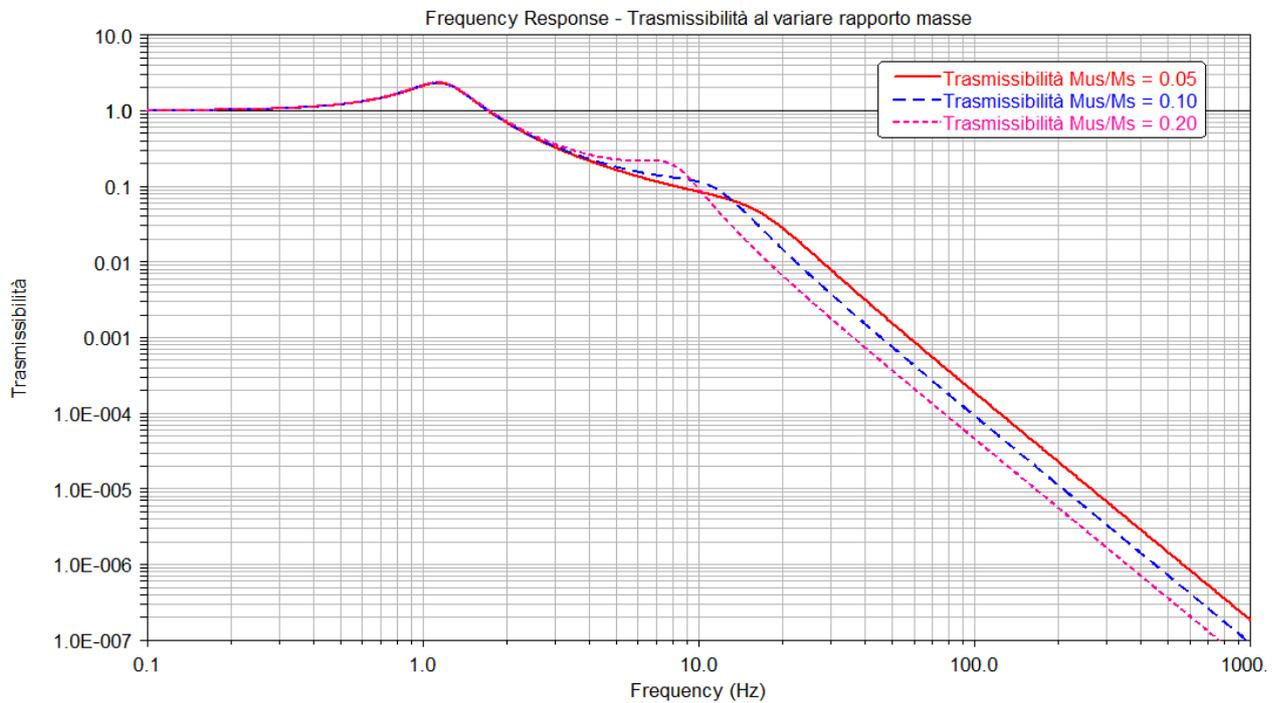
Massa sospesa	$m_s = 454.5 \text{ kg}$
Rapporto masse	$m_{us}/m_s = [0.05, 0.10, 0.20]$
Coefficiente di rigidezza di uno pneumatico gonfio (2,45 bar)	$k_{tr1} = 221 \text{ kN/m}$
Coefficiente di rigidezza di uno pneumatico sgonfio (1,47 bar)	$k_{tr2} = 136 \text{ kN/m}$
Rapporto rigidezze	$k_{tr}/k_s = [5, 8, 10]$
Smorzamento del sistema sospensivo	$\xi = [0.1, 0.3, 0.707]$
Coefficiente di smorzamento dello pneumatico alla pressione di 2,45 bar	$c_{t1} = 2.79 \text{ kN} \cdot \text{s/m}$
Coefficiente di smorzamento dello pneumatico alla pressione di 1,47 bar	$c_{t2} = 3.62 \text{ kN} \cdot \text{s/m}$

**Tabella 4:** Dati utilizzati per l'analisi del modello a due gradi di libertà di  $\frac{1}{4}$  di veicolo in ambiente MSC ADAMS.

Per ottenere l'analisi in frequenza del modello sono stati creati due canali (ingresso e uscita), dove il primo è l'input channel applicato sullo pneumatico, che simula un generico profilo sinusoidale stradale al variare della frequenza, mentre il secondo è l'output channel il quale è applicata alla massa sospesa per ricavare lo spostamento in uscita del sistema. Ovviamente è possibile ottenere altri tipi di uscite come velocità, accelerazione, forza ecc. Nel caso in esame si vuole ricavare la trasmissibilità in termini di ampiezza e quindi lo spostamento della massa sospesa al variare del rapporto delle masse, delle rigidezze, del coefficiente di smorzamento del sistema sospensivo e infine al variare della pressione di gonfiaggio dello pneumatico.

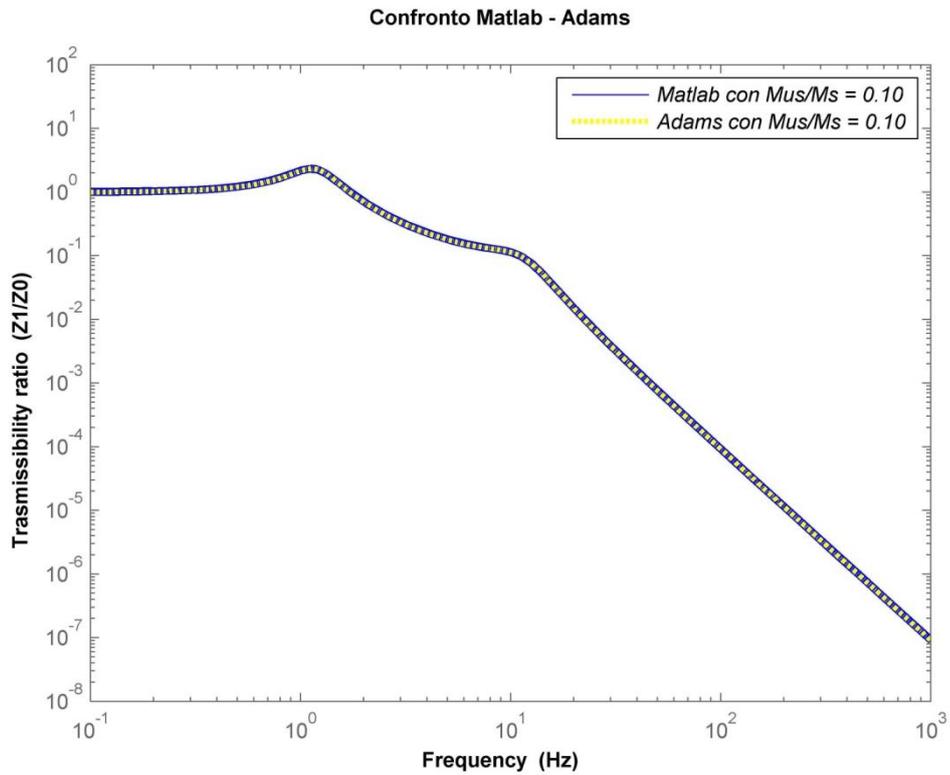
### Trasmissibilità al variare del rapporto delle masse

La Figura 45 mostra l'effetto del rapporto tra la massa non sospesa e la massa sospesa sulla trasmissibilità del sistema considerato, tenendo conto di uno pneumatico gonfio a 2.45 bar in assenza di smorzamento dello pneumatico stesso.

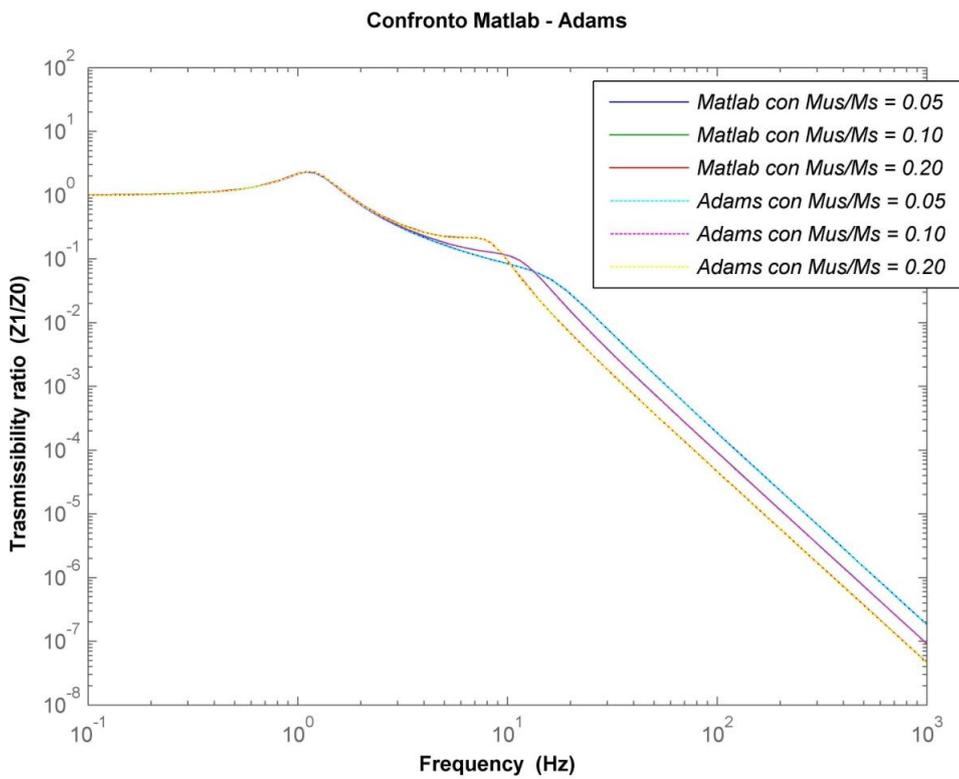


**Figura 45:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle due masse in assenza di smorzamento dello pneumatico.

Le figure seguenti riportano il confronto tra i risultati ottenuti sia in MATLAB che MSC ADAMS:



**Figura 46:** Confronto MATLAB – MSC ADAMS relativo alla trasmissibilità del sistema per un rapporto di masse pari a 0.10.

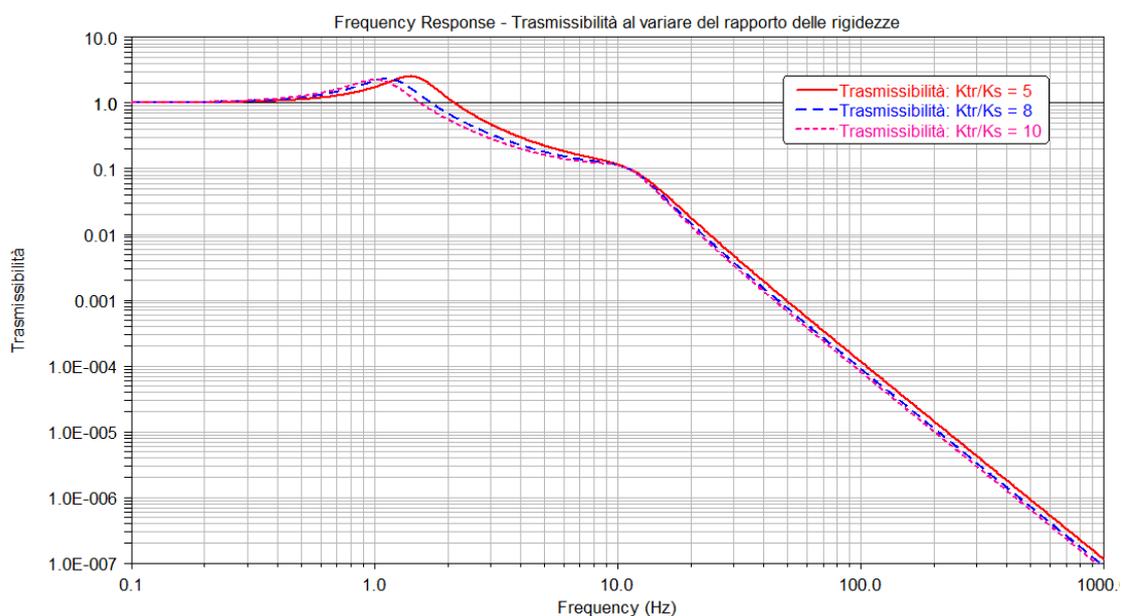


**Figura 47:** Confronto MATLAB – MSC ADAMS relativo alla trasmissibilità del sistema al variare del rapporto delle masse.

Si può notare come i risultati ottenuti in MSC ADAMS siano confrontabili con quelli ottenuti in MATLAB, dato che le curve si sovrappongono perfettamente. Questo significa che il modello di  $\frac{1}{4}$  di veicolo a 2 gradi di libertà di Figura 39, essendo più realistico, rispecchi il modello analitico di Figura 5 analizzato in MATLAB.

### Trasmissibilità al variare del rapporto delle rigidità

La Figura 48 mostra l'effetto del rapporto tra la rigidità della massa non sospesa e quella della massa sospesa sulla trasmissibilità del sistema considerato, tenendo conto di un pneumatico gonfio a 2.45 bar in assenza di smorzamento dello pneumatico stesso.



**Figura 48:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto delle rigidità in assenza di smorzamento dello pneumatico.

Come nel caso precedente, facendo il confronto tra la Figura 48 e la Figura 12, si ottengono gli stessi risultati di trasmissibilità alla stessa frequenza di eccitazione (vedi Figura 49 e Figura 50).

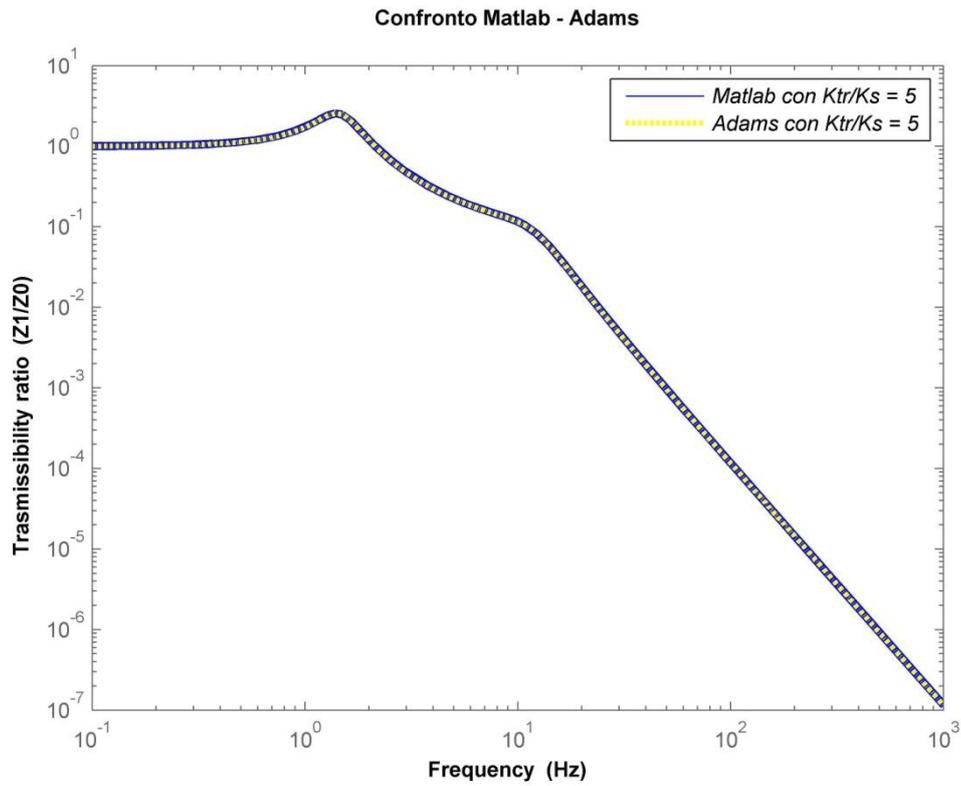


Figura 49: Confronto MATLAB – MSC ADAMS relativo alla trasmissibilità del sistema per un rapporto di rigidzze pari a 5.

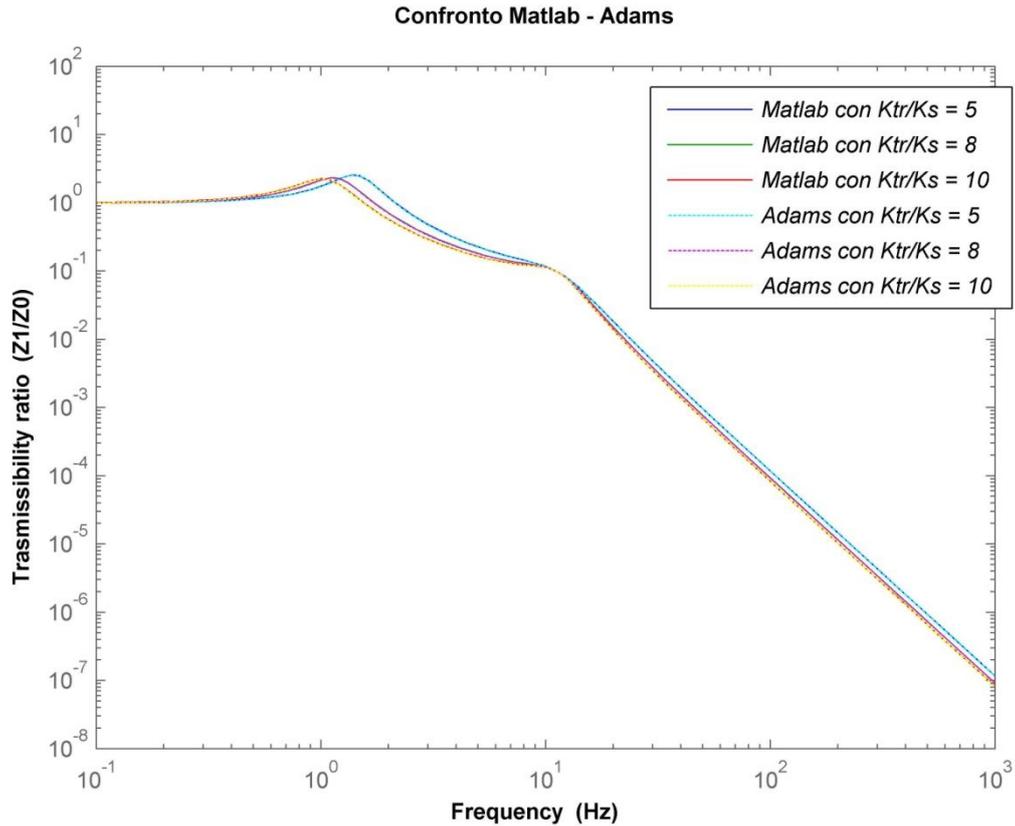
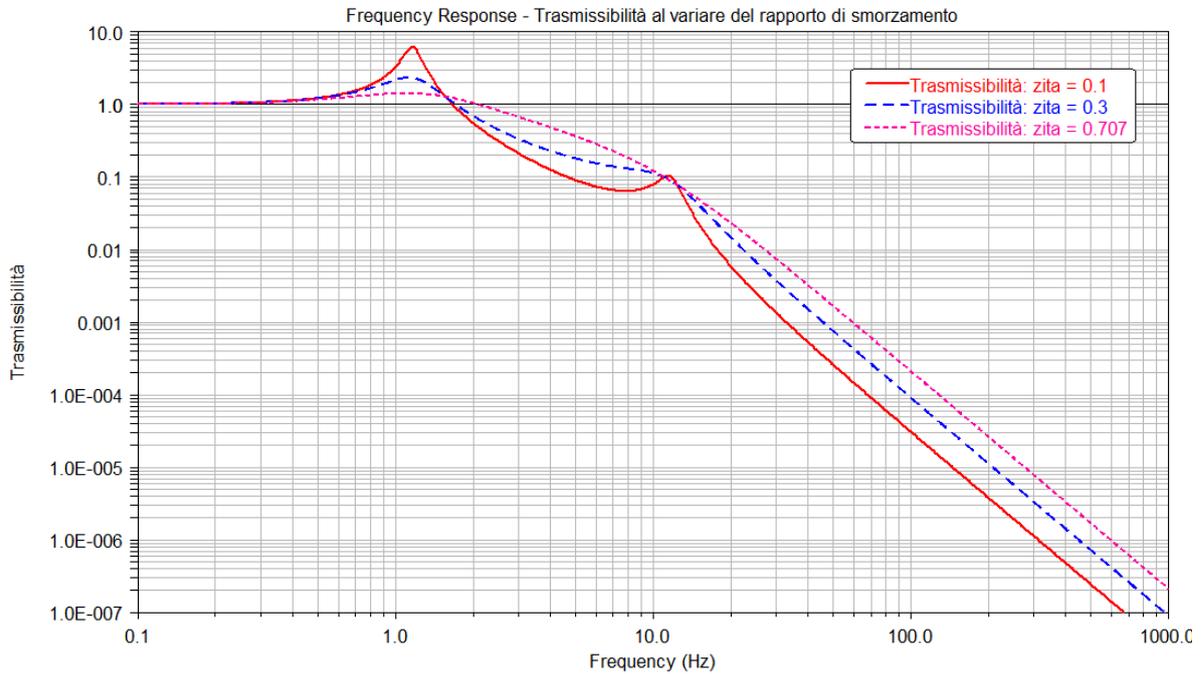


Figura 50: Confronto MATLAB – MSC ADAMS relativo alla trasmissibilità del sistema al variare delle rigidzze.

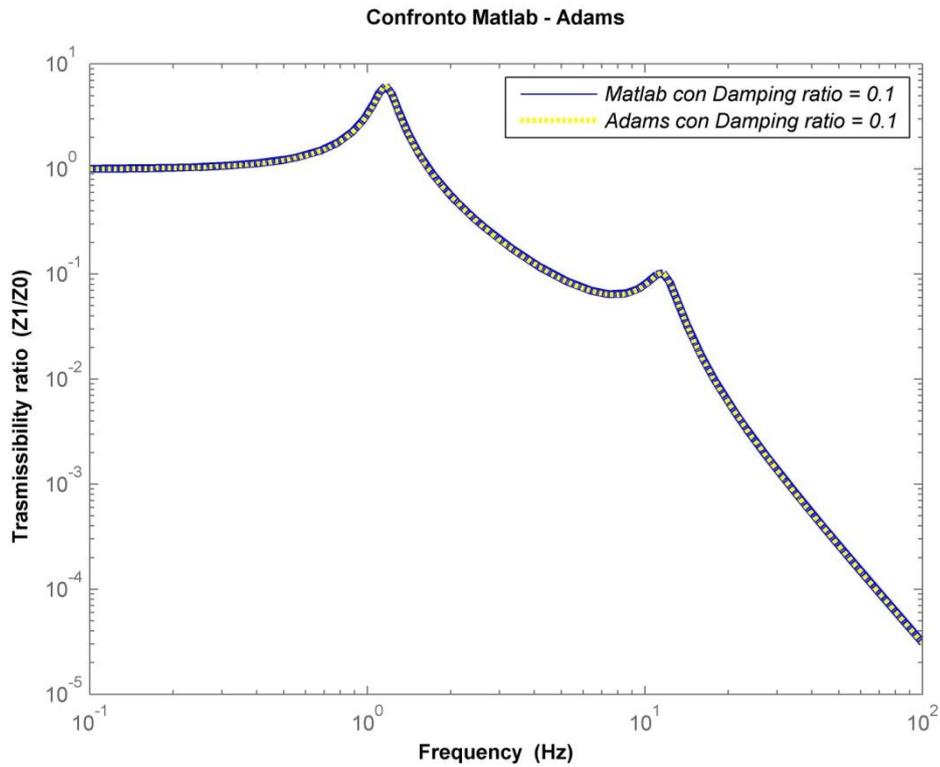
### Trasmissibilità al variare del rapporto di smorzamento

La Figura 51 mostra l'effetto del rapporto di smorzamento del sistema sospensivo sulla trasmissibilità del sistema considerato, tenendo conto di uno pneumatico gonfio a 2.45 bar in assenza di smorzamento dello pneumatico stesso.

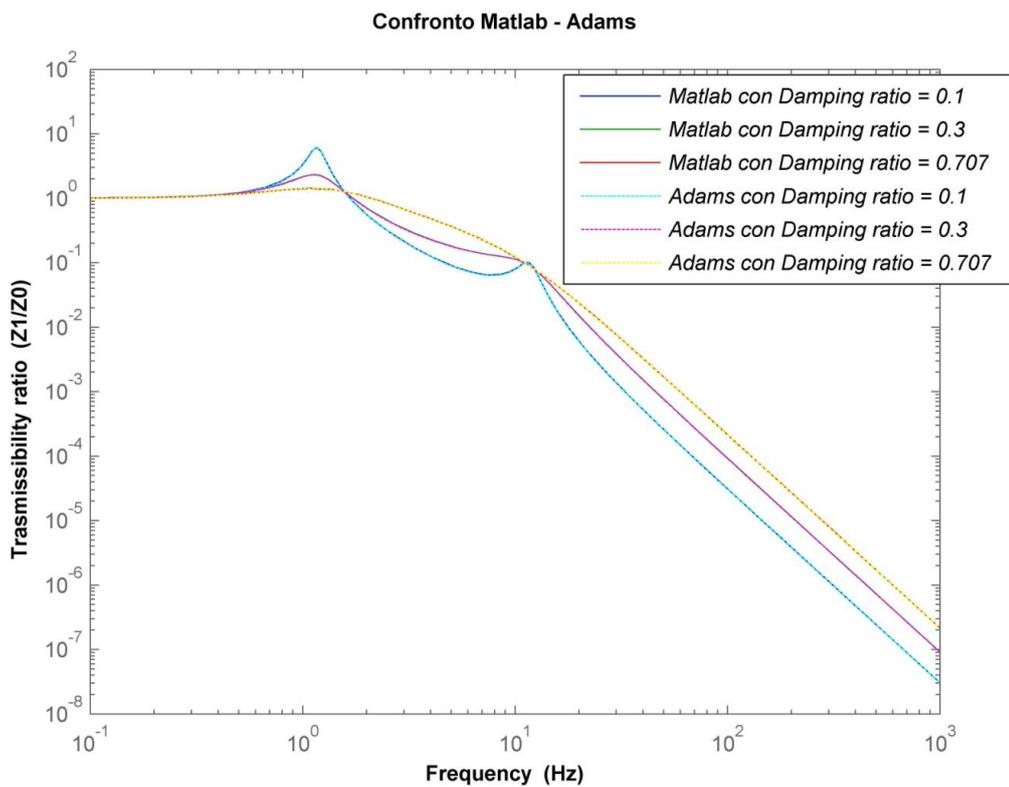


**Figura 51:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare del rapporto di smorzamento in assenza di smorzamento dello pneumatico.

Anche in questo caso, facendo il confronto tra la Figura 51 e la Figura 13, si ottengono gli stessi risultati di trasmissibilità alla stessa frequenza di eccitazione (vedi Figura 52 e Figura 53).



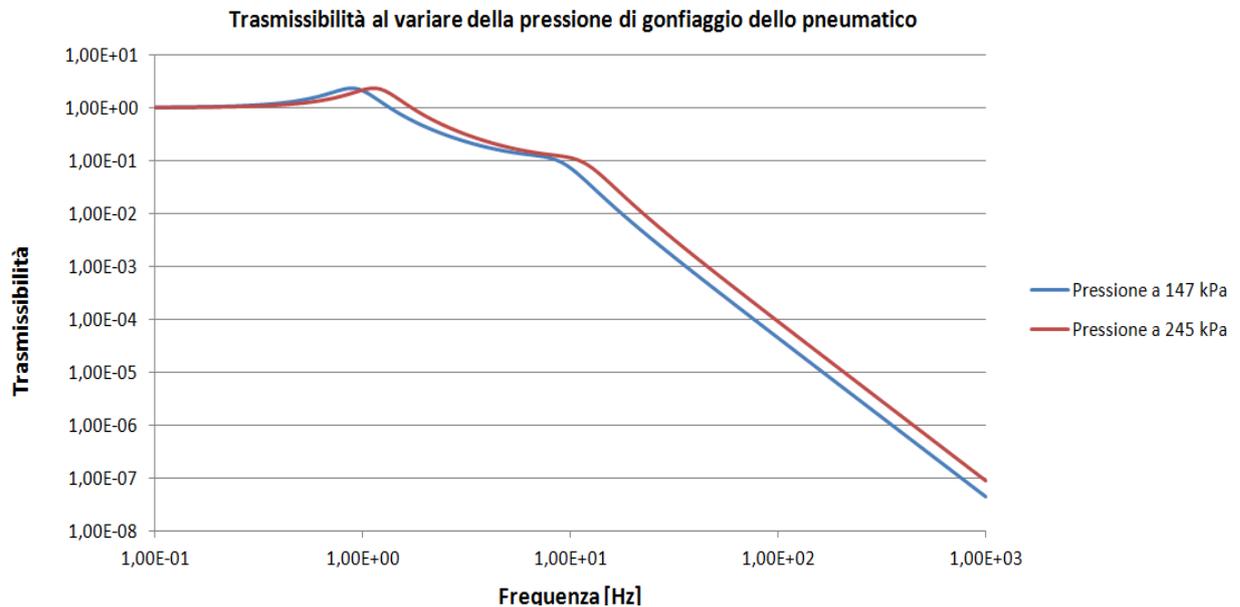
**Figura 52:** Confronto MATLAB – MSC ADAMS relativo alla trasmissibilità del sistema per un rapporto di smorzamento del sistema sospensivo pari a 0.1.



**Figura 53:** Confronto MATLAB – MSC ADAMS relativo alla trasmissibilità del sistema al variare dello smorzamento del sistema sospensivo.

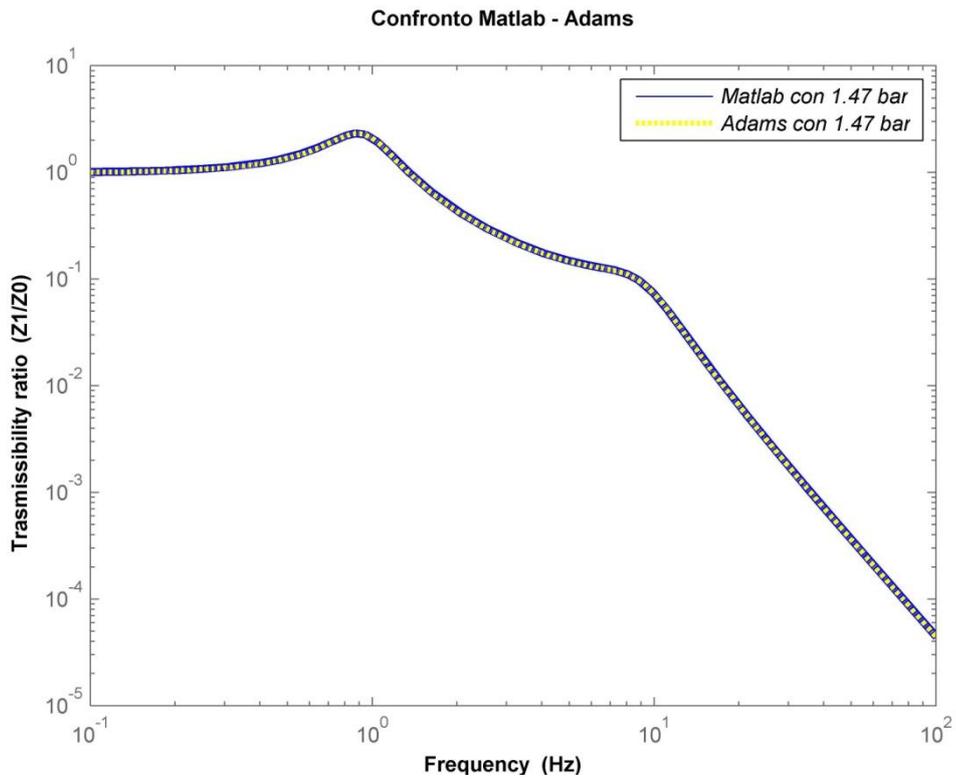
### Trasmissibilità al variare della pressione di gonfiaggio

La Figura 54 mostra l'effetto della variazione di pressione dello pneumatico sulla trasmissibilità del sistema considerato, in assenza di smorzamento dello pneumatico stesso considerando costante il rapporto delle rigidità pari a 8.

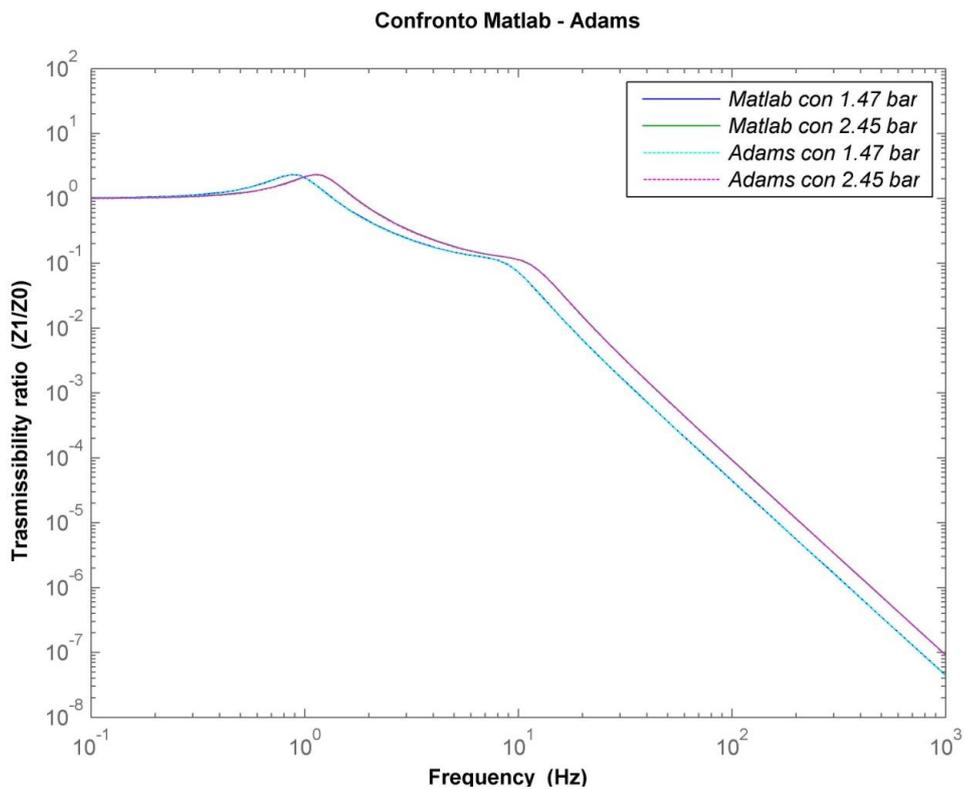


**Figura 54:** Risposta in frequenza del modello di un  $\frac{1}{4}$  di veicolo al variare della pressione di gonfiaggio dello pneumatico.

Anche in questo caso, facendo il confronto tra la Figura 54 e la Figura 17, si ottengono gli stessi risultati di trasmissibilità alla stessa frequenza di eccitazione (vedi Figura 55 e Figura 56).



**Figura 55:** Confronto MATLAB – MSC ADAMS relativo alla trasmissibilità del sistema alla pressione di gonfiaggio di 1.47 bar.



**Figura 56:** Confronto MATLAB – MSC ADAMS relativo alla trasmissibilità del sistema al variare della pressione di gonfiaggio.

### 3.6 Trasmissibilità con un profilo stradale sinusoidale

In questo paragrafo si vuole analizzare la trasmissibilità del modello di ¼ di veicolo sia in ambiente MATLAB che in ambiente MSC ADAMS, considerando un segnale sinusoidale avente una determinata ampiezza, lunghezza d'onda e una frequenza di eccitazione.

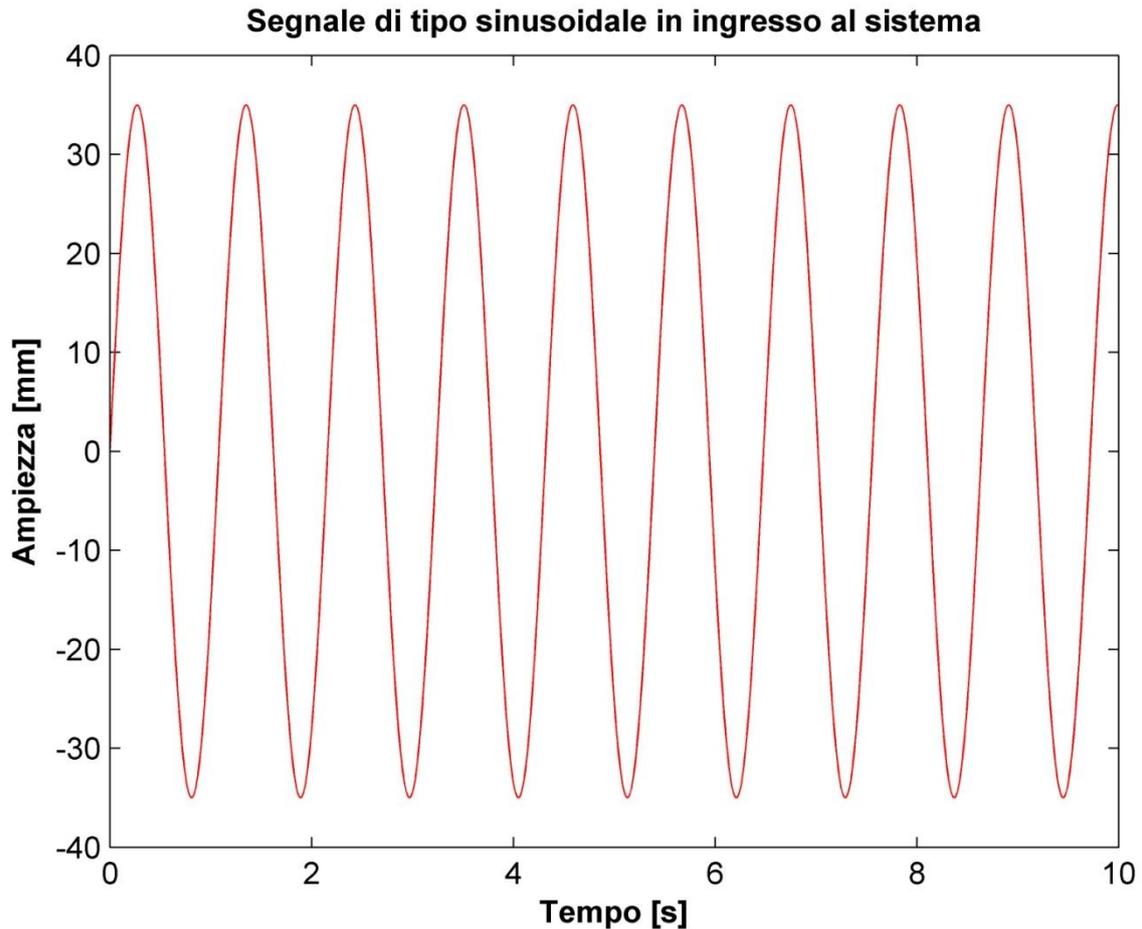
#### Ambiente MATLAB

Si fa sempre riferimento al modello di Figura 5 e si considerano i seguenti dati riportati in tabella:

Massa sospesa	$m_s = 454.5 \text{ kg}$
Rapporto masse	$m_{us}/m_s = 0.10$
Coefficiente di rigidità di uno pneumatico gonfio (2,45 bar)	$k_{tr1} = 221 \text{ kN/m}$
Coefficiente di rigidità di uno pneumatico gonfio (1,47 bar)	$k_{tr2} = 136 \text{ kN/m}$
Rapporto rigidità	$k_{tr}/k_s = 8$
Smorzamento del sistema sospensivo	$\xi = 0.3$

**Tabella 5:** Dati utilizzati per l'analisi del modello a due gradi di libertà di ¼ di veicolo.

Il segnale sinusoidale di eccitazione in ingresso, rappresentato in Figura 57, è ottenuto impostando una velocità di avanzamento del veicolo pari a 10 km/h, un'ampiezza di segnale pari a 35 mm e una lunghezza d'onda pari a 3 m.

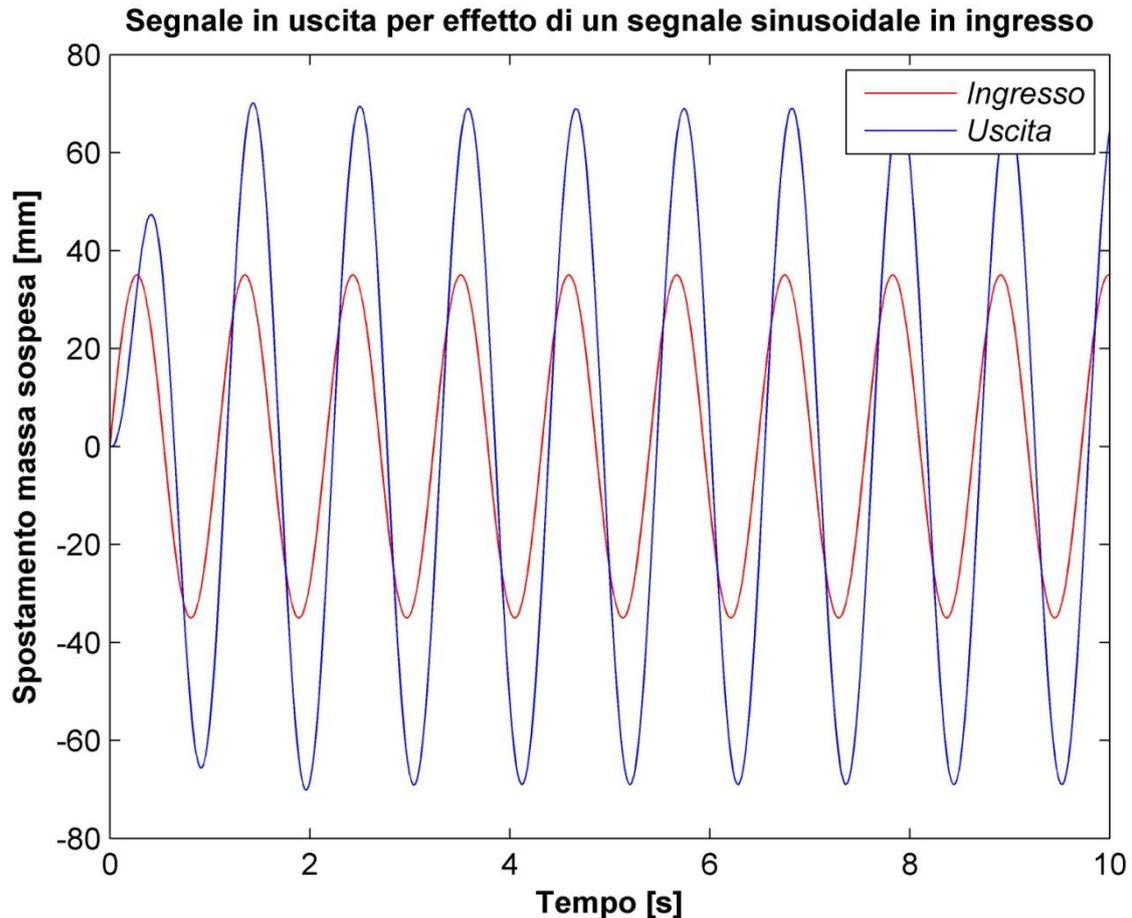


**Figura 57:** *Segnale sinusoidale di eccitazione stradale in ingresso.*

In questo caso, eccitando il sistema con tale segnale e considerando uno pneumatico gonfio, si ha una trasmissibilità pari a 1.97.

Tale valore può essere dimostrato dalla Figura 11, infatti per un qualsiasi segnale di eccitazione che abbia una frequenza di 0.92 Hz, si ottiene una trasmissibilità di circa 1.95 – 2.

Di conseguenza lo spostamento della massa sospesa in termini di ampiezza, per effetto del segnale in ingresso, è rappresentato dalla Figura 58.

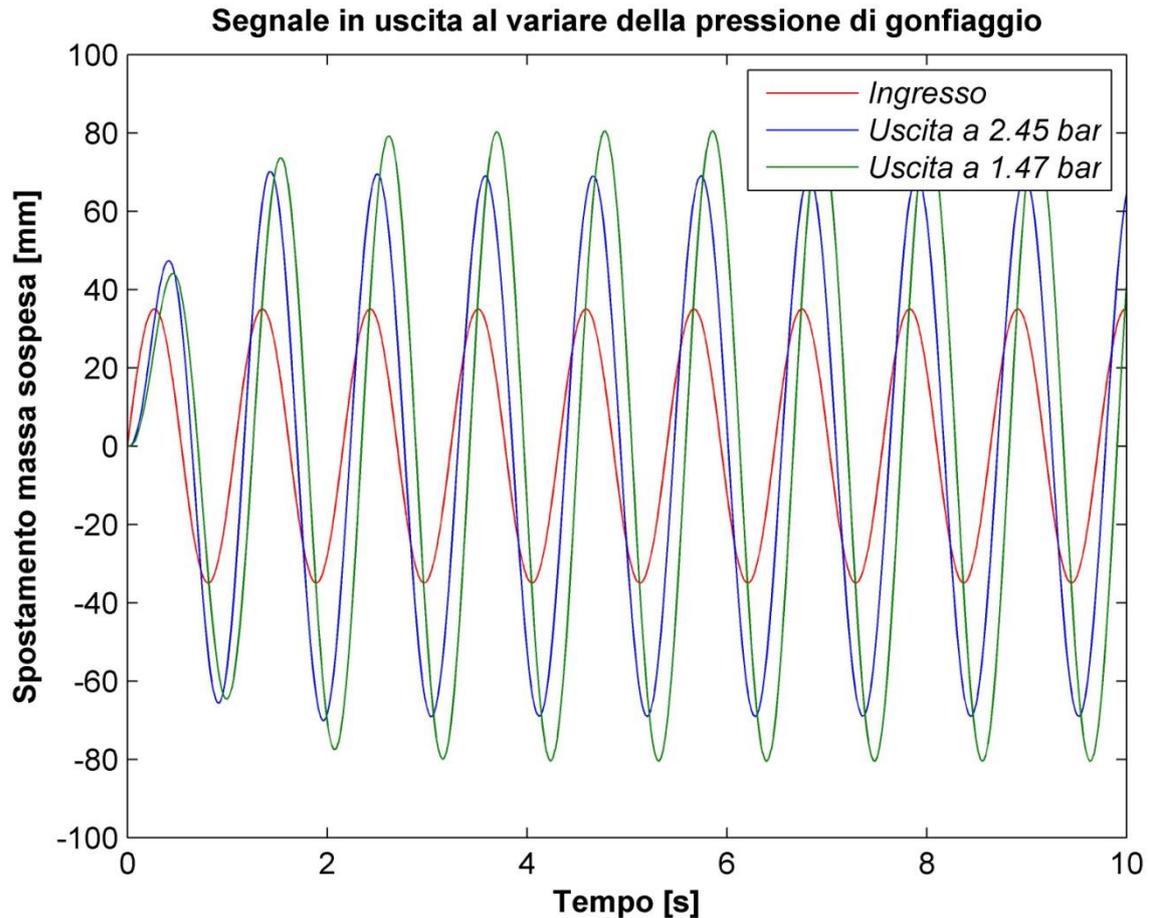


**Figura 58:** Spostamento in termini di ampiezza della massa sospesa (segnale in uscita del sistema) con uno pneumatico gonfio.

Si evince che tale spostamento ha un andamento sinusoidale con la stessa frequenza di oscillazione e con un leggero ritardo rispetto al segnale in ingresso e inoltre, come volevasi dimostrare, presenta un'ampiezza pari a 69.09 mm che è circa il doppio di quella di tale segnale.

Per uno pneumatico sgonfio ad una pressione di 1.47 bar, considerando lo stesso segnale in ingresso di Figura 57, si ottiene una trasmissibilità pari a 2.3. Tali valori di trasmissibilità, relativi ai due pneumatici, risultano differenti tra loro perché al variare della pressione si ha una completa traslazione della risposta in frequenza, come mostrato in Figura 17 e Figura 54.

Quindi la Figura 59 mostra l'andamento dei due segnali in uscita ad una differente pressione di gonfiaggio avendo sempre in ingresso lo stesso segnale sinusoidale.



**Figura 59:** Spostamento della massa sospesa al variare della pressione di gonfiaggio e ad una frequenza di eccitazione pari a 0.92 Hz.

Questi risultati sono stati ottenuti facendo interagire SIMULINK con MATLAB e in particolare i file *"sinusoidale.m"* e *"sinusoide.mdl"*. La Figura 60 mostra lo schema a blocchi costruito in SIMULINK dove nei due blocchi centrali sono inserite le funzioni di trasferimento, relative alle due pressioni di gonfiaggio, e a monte e a valle ci sono l'ingresso e l'uscita desiderata. Da notare che l'ingresso viene prelevato da MATLAB, sottoforma di una determinata funzione nel tempo, e l'uscita viene restituita in MATLAB stesso. Il codice *"sinusoidale.m"* è inserito nell'Appendice C.

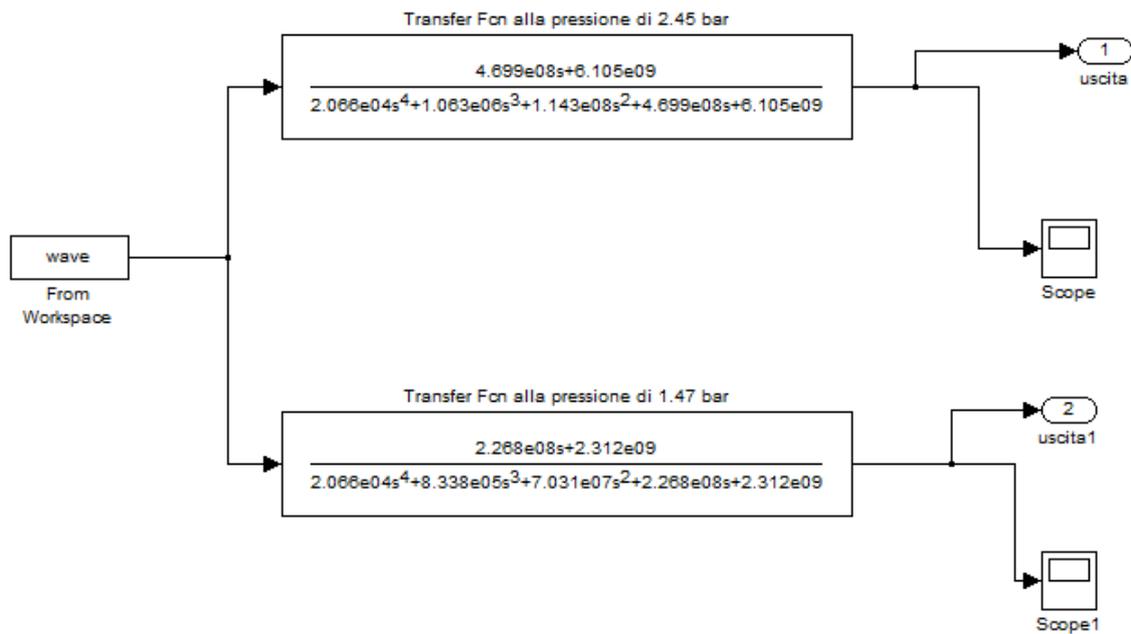
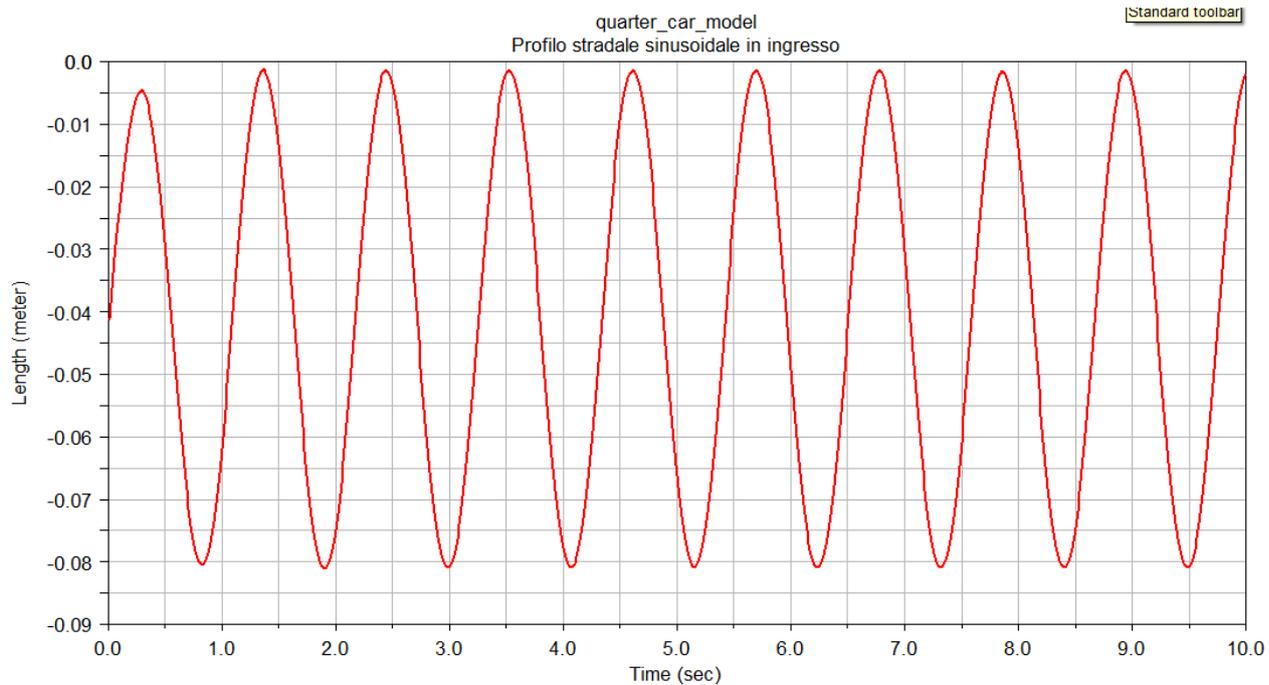


Figura 60: Schema a blocchi utilizzato in SIMULINK.

### Ambiente MSC ADAMS

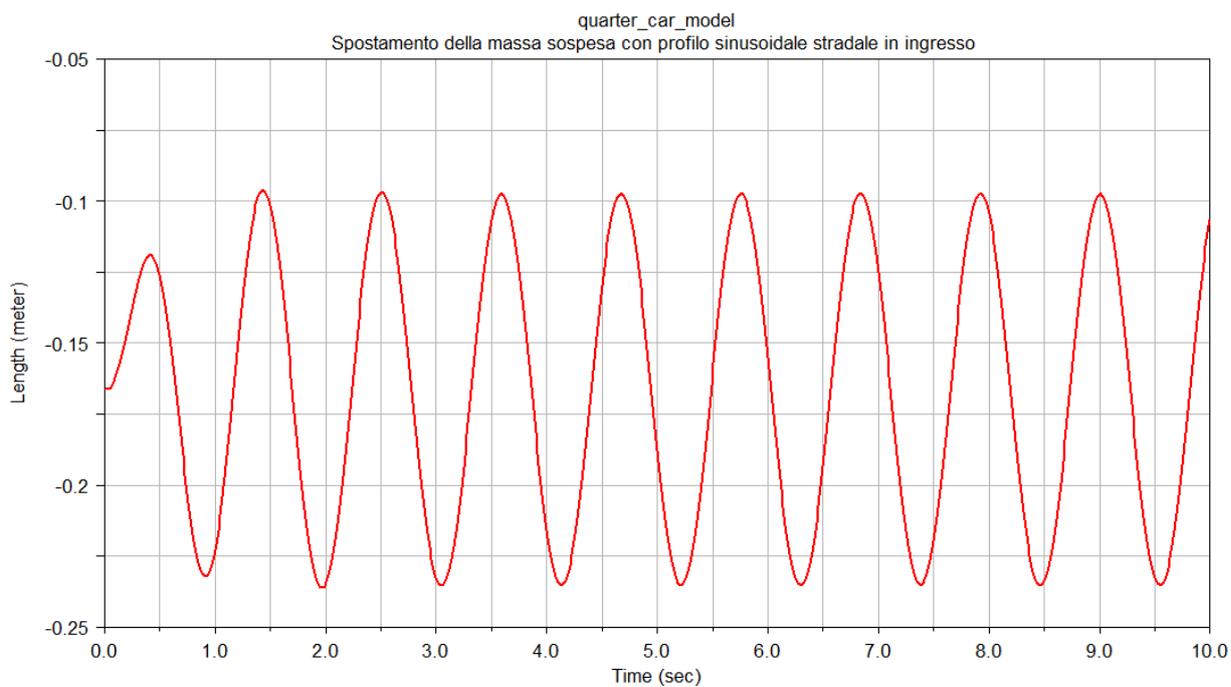
Si fa sempre riferimento al modello di Figura 39 e alla Tabella 5 della sezione precedente.

Anche in questo caso, impostando una velocità di avanzamento del veicolo pari a 10 km/h, un'ampiezza di segnale pari a 35 mm e una lunghezza d'onda pari a 3 m, il segnale di eccitazione in ingresso è il seguente:



**Figura 61:** Segnale sinusoidale di eccitazione stradale in ingresso.

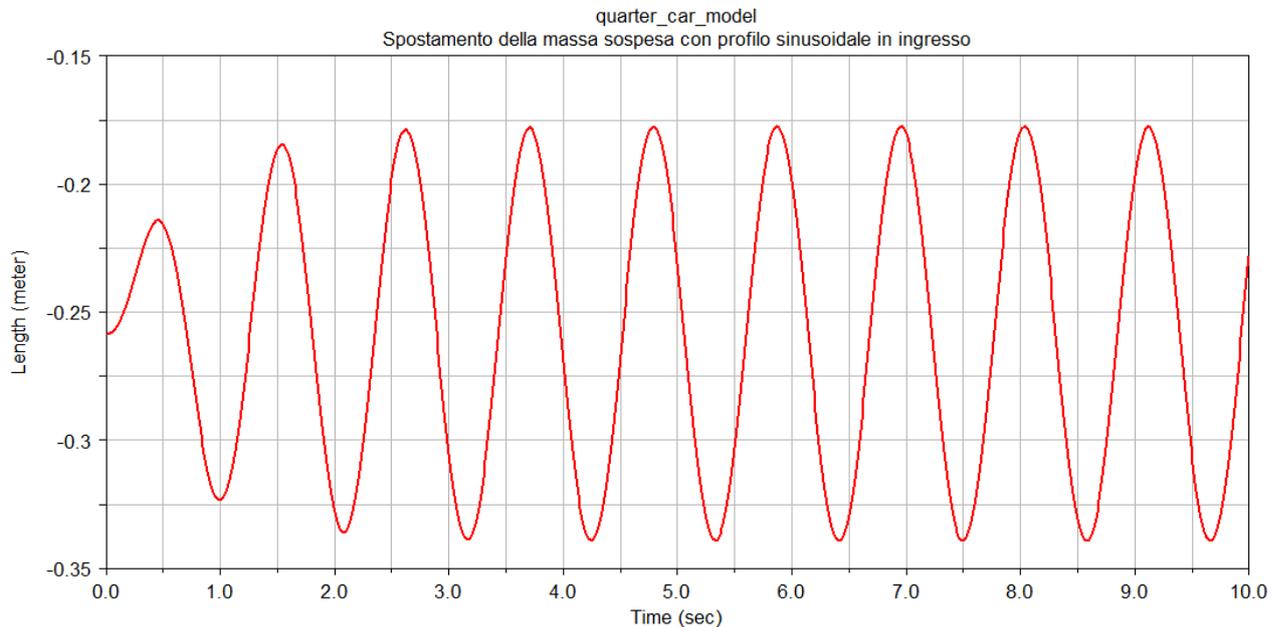
Inoltre, considerando uno pneumatico gonfio ad una pressione di 2.45 bar, si ottiene dalla simulazione il seguente segnale in uscita:



**Figura 62:** Spostamento massa sospesa con uno pneumatico gonfio alla pressione di 2.45 bar.

Dalla Figura 62 si evince che l'ampiezza del segnale in uscita è pari a 0.069 m, la quale implica una trasmissibilità del sistema pari a 1.97.

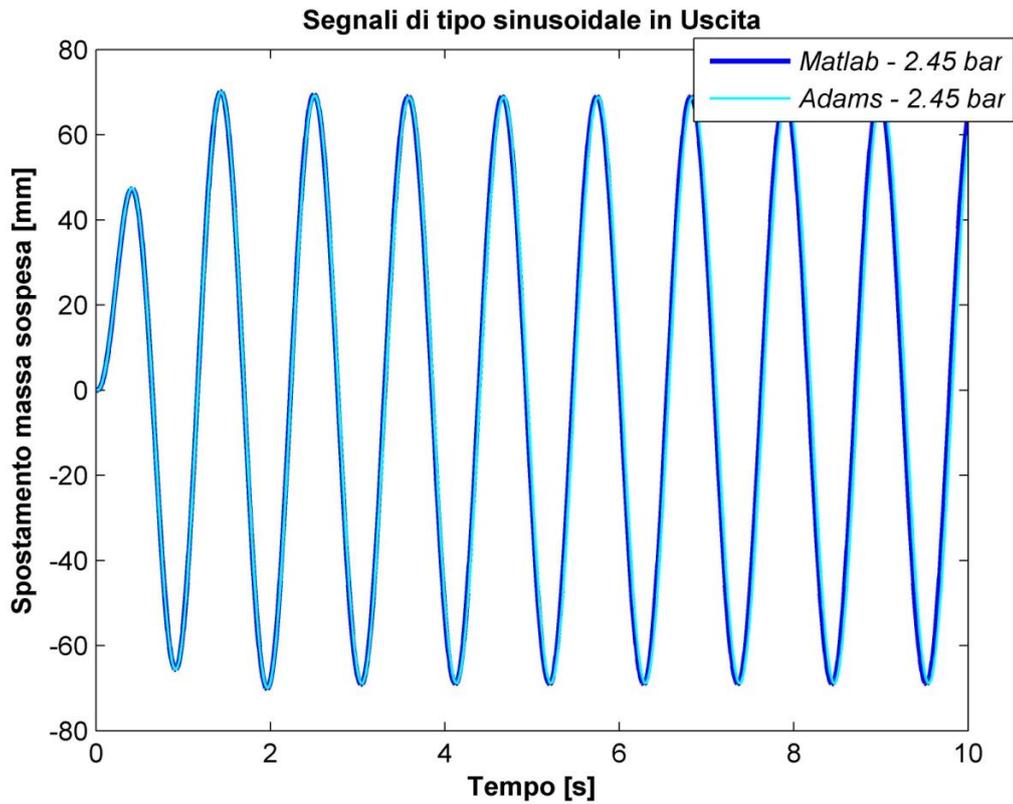
La Figura 63 presenta il segnale in uscita del sistema considerando uno pneumatico sgonfio alla pressione di 1.47 bar.



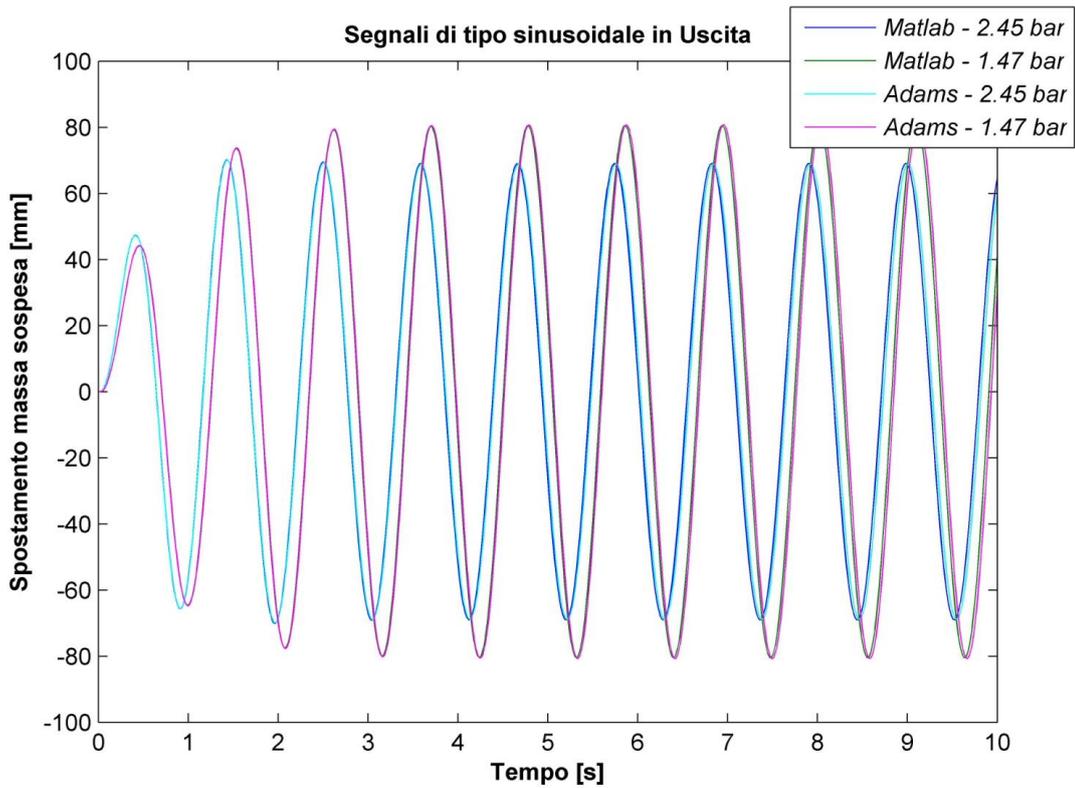
**Figura 63:** *Spostamento della massa sospesa con uno pneumatico sgonfio alla pressione di 1.47 bar.*

In questo caso l'ampiezza del segnale in uscita è pari a 0.0806 m per cui la trasmissibilità risulta 2.3.

E' possibile mettere a confronto i segnali ottenuti in MSC ADAMS (normalizzati) con quelli ottenuti in MATLAB, come mostrato nella seguenti figure:



**Figura 64:** Confronto tra MATLAB e MSC ADAMS relativo allo spostamento della massa sospesa alla pressione di 2.45 bar.



**Figura 65:** Confronto tra MATLAB e MSC ADAMS relativo allo spostamento della massa sospesa al variare della pressione di gonfiaggio.

Si evince, dalla Figura 64 e Figura 65, come gli spostamenti della massa sospesa al variare della pressione di gonfiaggio, ottenuti sia in MATLAB che in MSC ADAMS, si sovrappongono abbondantemente per cui i due modelli di Figura 5 e di Figura 39 sono confrontabili.

### Trasmissibilità al variare del rapporto delle masse

La Figura 66 rappresenta lo spostamento della massa sospesa del sistema variando il rapporto delle masse, considerando come profilo stradale in ingresso la Figura 61 ad una frequenza di eccitazione pari a 0.92 Hz con uno pneumatico gonfio.

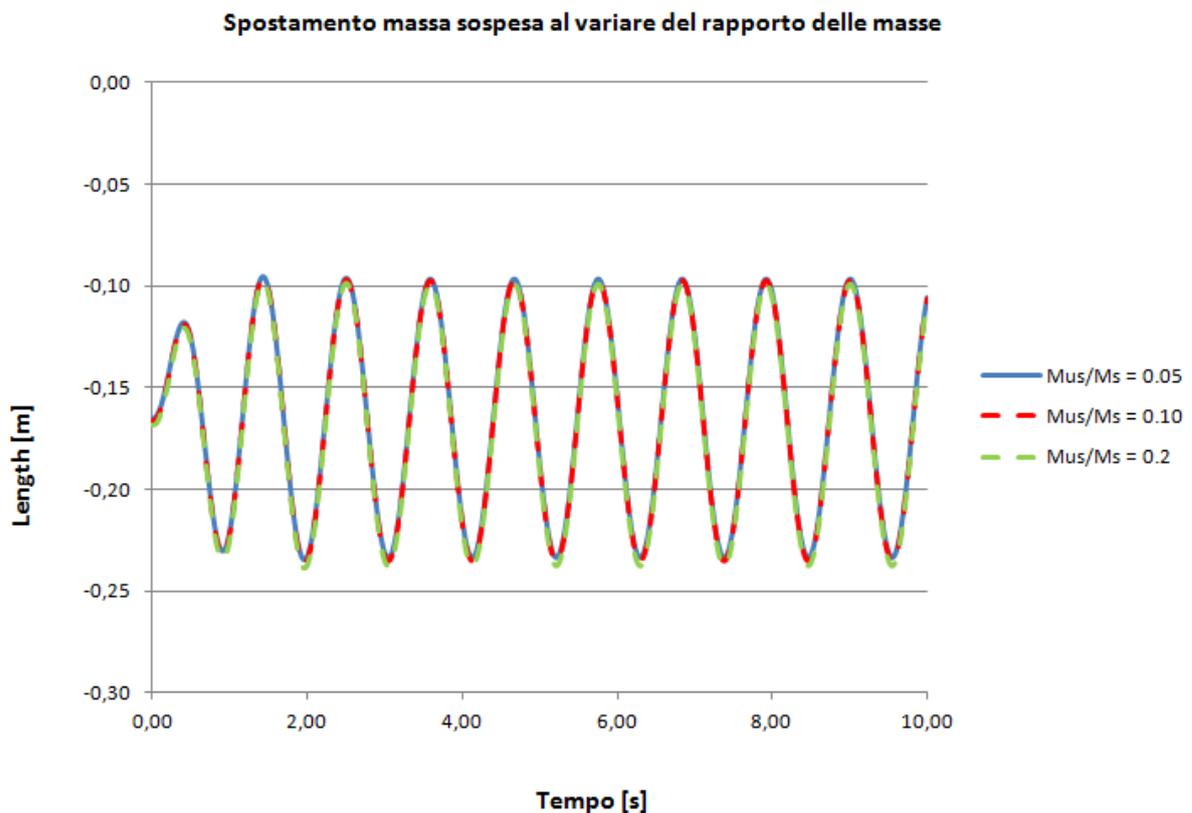


Figura 66: Spostamento della massa sospesa al variare del rapporto delle masse.

Si evince che a questa frequenza di eccitazione la trasmissibilità del sistema rimane pressoché costante, come dimostrato dalla Figura 45.

### Trasmissibilità al variare del rapporto delle rigidezze

La Figura 67 mostra come lo spostamento della massa sospesa viene influenzato dal rapporto delle rigidezze, avendo in ingresso lo stesso segnale utilizzato nelle analisi precedenti.

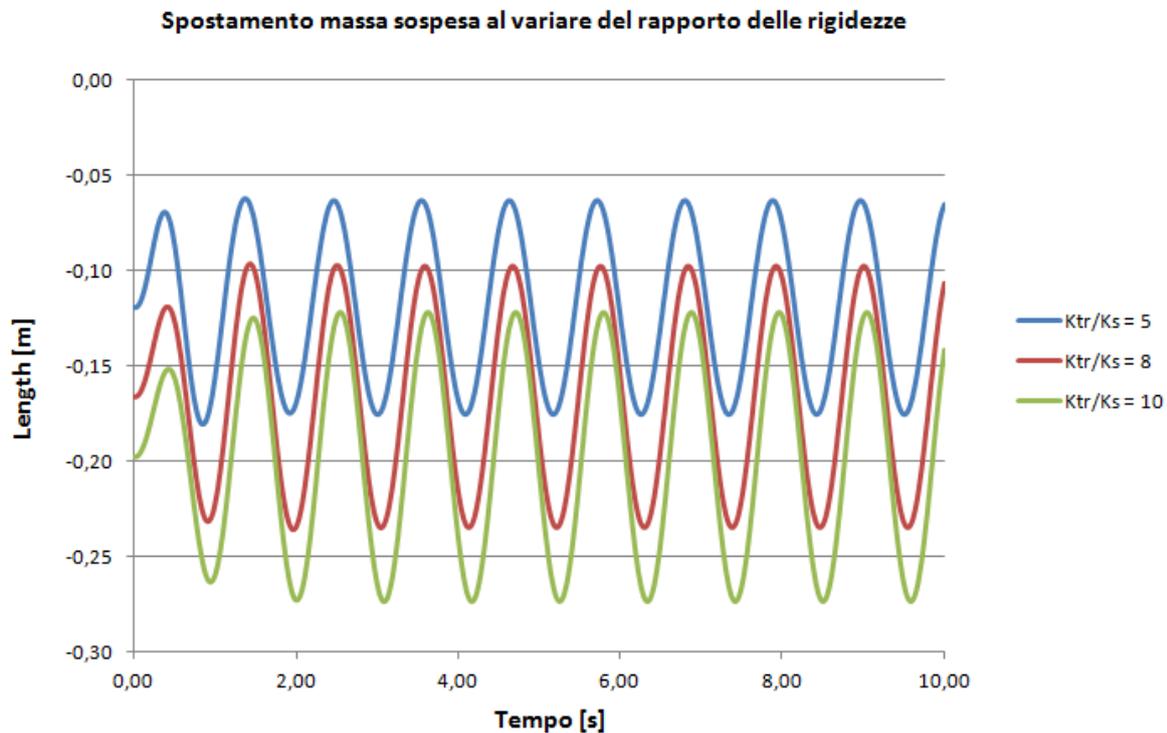


Figura 67: Spostamento della massa sospesa al variare del rapporto delle rigidezze.

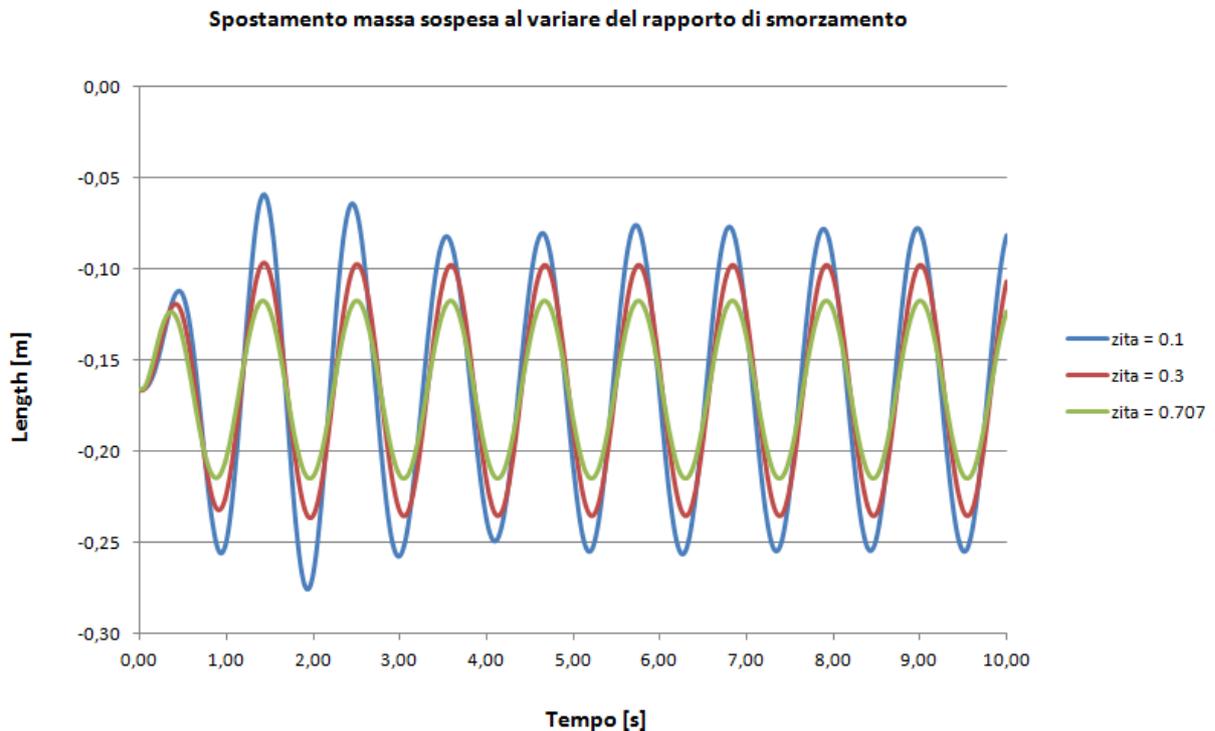
Da tale figura si nota come i tre segnali in uscita sono traslati l'uno rispetto all'altro. Infatti, a parità di rigidezza della massa non sospesa, una sospensione più morbida implica un rapporto di rigidezza più elevato e quindi in condizioni statiche la massa sospesa tende ad abbassarsi maggiormente.

Inoltre si evince che il segnale in uscita dal sistema per effetto di un rapporto delle rigidezze pari a 5, presenta un'ampiezza di 0.056 m quindi una trasmissibilità di 1.6. Per un rapporto di rigidezza pari a 8, si ha un'ampiezza di 0.069 m e una trasmissibilità di 1.97. Infine per un rapporto di rigidezza pari a 10, si ha un'ampiezza di 0.075 m e una trasmissibilità di 2.14.

Questi risultati sono confrontabili con quelli ottenuti dalla Figura 48 in corrispondenza di una frequenza di eccitazione pari a 0.92 Hz.

### Trasmissibilità al variare del rapporto di smorzamento

La Figura 68 mostra come lo spostamento della massa sospesa viene influenzato dal rapporto di smorzamento del sistema sospensivo, avendo sempre in ingresso il profilo stradale di Figura 61.



**Figura 68:** Spostamento massa sospesa al variare del rapporto di smorzamento ad una frequenza di eccitazione di 0.92 Hz.

Dalla figura si evince che all'aumentare del rapporto di smorzamento del sistema sospensivo l'ampiezza dello spostamento della massa sospesa in uscita diminuisce a parità di frequenza di eccitazione. In questo caso con un rapporto di smorzamento pari a 0.1, l'ampiezza del segnale di uscita è di 0.085 m, quindi la trasmissibilità è pari a 2.42. Con un rapporto di smorzamento pari a 0.3, l'ampiezza del segnale è di 0.069 m e la trasmissibilità è di 1.97 e infine con un rapporto di smorzamento pari a 0.707, l'ampiezza del segnale è pari a 0.049 m e la trasmissibilità di 1.4.

Anche qui questi risultati sono confrontabili con quelli ottenuti dalla Figura 51 in corrispondenza di una frequenza di eccitazione pari a 0.92 Hz.

### 3.7 Comportamento della massa sospesa con un profilo stradale di tipo Gradino

Si vuole analizzare il comportamento del modello di  $\frac{1}{4}$  di veicolo, in particolare lo spostamento della massa sospesa, sia in ambiente MATLAB che in ambiente MSC ADAMS, quando si ha in ingresso al sistema considerato un gradino.

#### Ambiente MATLAB

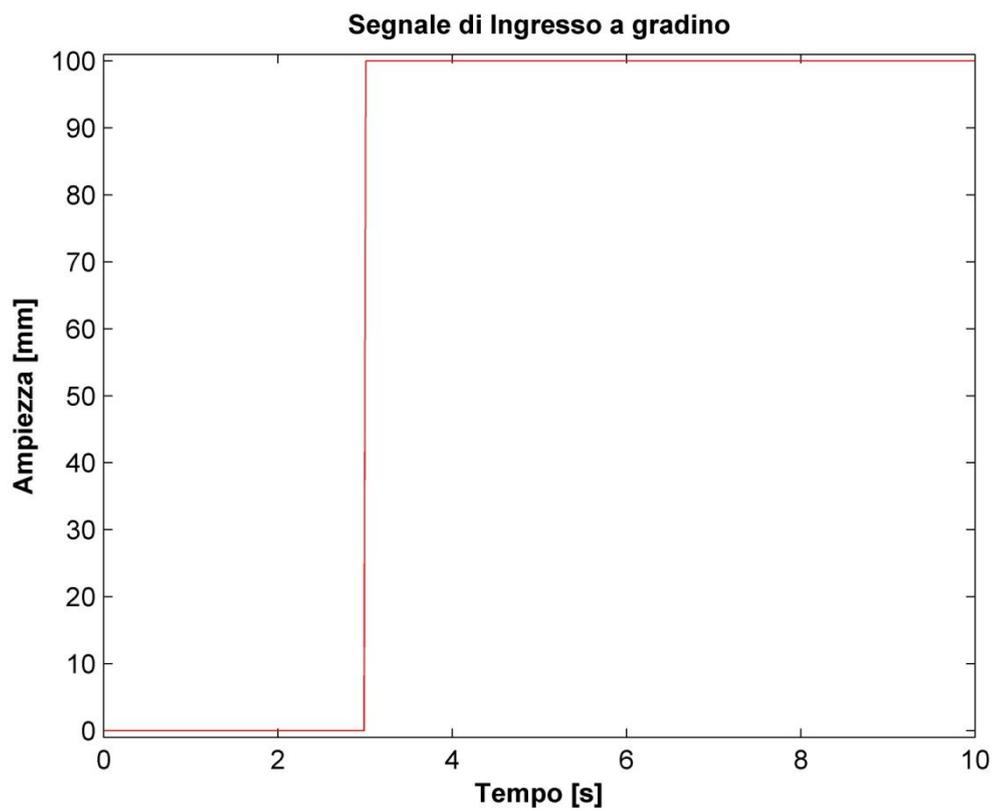
Facendo sempre riferimento al modello di Figura 5 e alla Tabella 5, il segnale di ingresso a gradino può essere rappresentato dalla seguente funzione:

$$signal = k \cdot (heaviside \cdot (t - t_1)) \quad (29)$$

dove

- $k$  è l'ampiezza del segnale;
- $heaviside$  è la funzione che determina il gradino in MATLAB;
- $t$  è il tempo di simulazione;
- $t_1$  è il tempo in cui il segnale passa da un'ampiezza pari a 0 a  $k$ .

Supponendo di considerare un'ampiezza  $k = 100$  mm, un tempo di simulazione  $t = 10$  s con un passo di integrazione pari a 0.01 e un tempo  $t_1 = 3$  s, il segnale di ingresso può essere rappresentato dalla seguente figura:



**Figura 69:** Segnale di ingresso a gradino rappresentato in MATLAB.

Analogamente al caso sinusoidale, variando la pressione di gonfiaggio dello pneumatico è possibile ottenere le seguenti risposte in uscita del sistema:

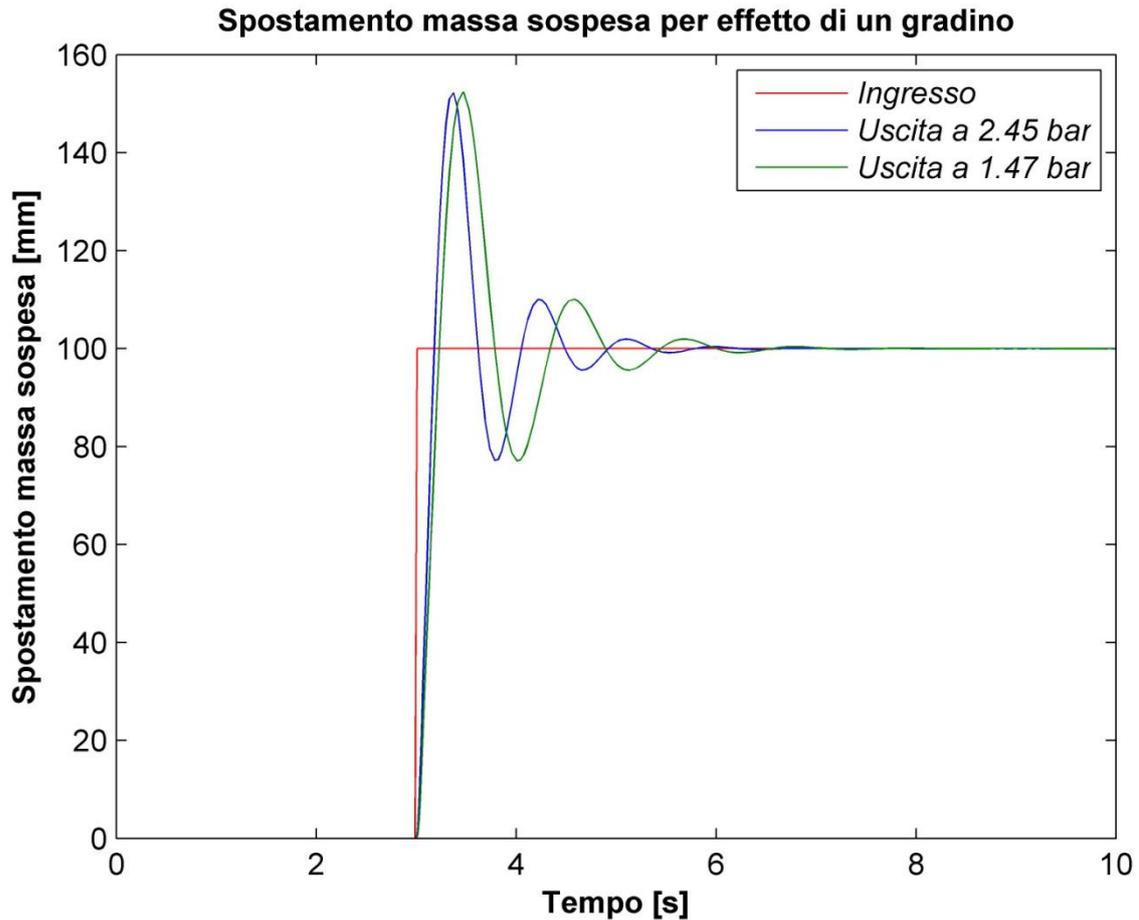


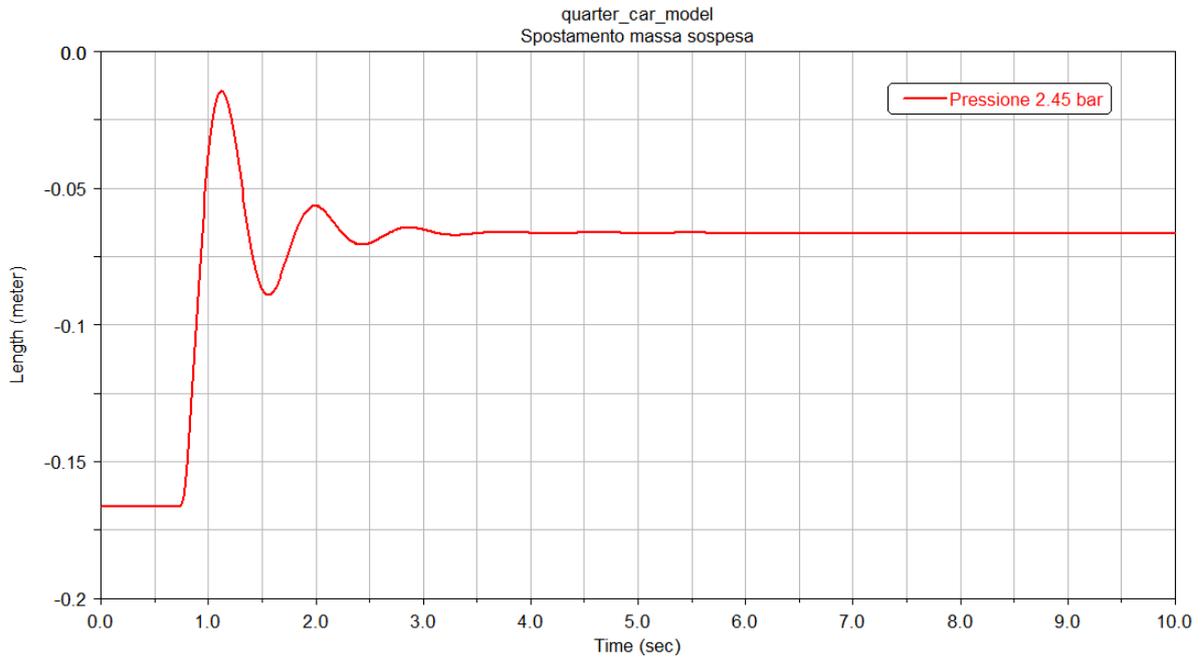
Figura 70: Spostamento della massa sospesa al variare della pressione di gonfiaggio dello pneumatico.

Dalla Figura 70 si evince che, per un gradino di ampiezza pari a 100 mm, la massa sospesa subisce uno spostamento massimo verso l'alto di 152.2 mm e l'oscillazione ha una durata di circa 3 s. Inoltre al variare della pressione di gonfiaggio si ha una completa traslazione nel tempo del segnale in uscita.

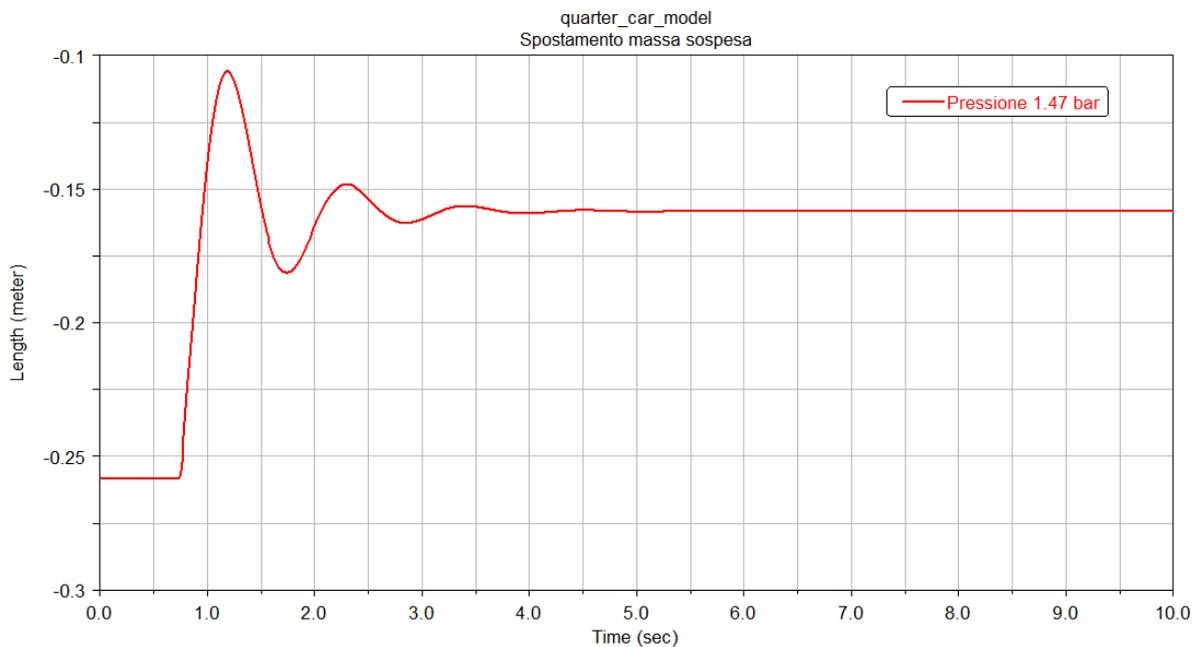
Questi risultati sono stati ottenuti facendo interagire SIMULINK con MATLAB e in particolare i file "*Piusegnali.m*" e "*signals.mdl*". Ovviamente per ottenere la risposta a gradino del sistema bisogna considerare il caso 4 del file "*Piusegnali*" riportato nell'*Appendice C*.

## Ambiente MSC ADAMS

Analogamente al caso precedente, considerando il modello di Figura 39 e la Tabella 5, lo stesso segnale al gradino in ingresso e una velocità di avanzamento del veicolo pari a 5 km/h, si ottengono i seguenti segnali in uscita al variare della pressione di gonfiaggio:



**Figura 71:** *Spostamento massa sospesa considerando uno pneumatico gonfio.*



**Figura 72:** *Spostamento massa sospesa considerando uno pneumatico gonfio.*

La Figura 73 e Figura 74 mostra il confronto tra i risultati ottenuti in MSC ADAMS (normalizzati) e quelli ottenuti in MATLAB al variare della pressione di gonfiaggio dello pneumatico, quando il sistema è sollecitato da un ingresso a gradino.

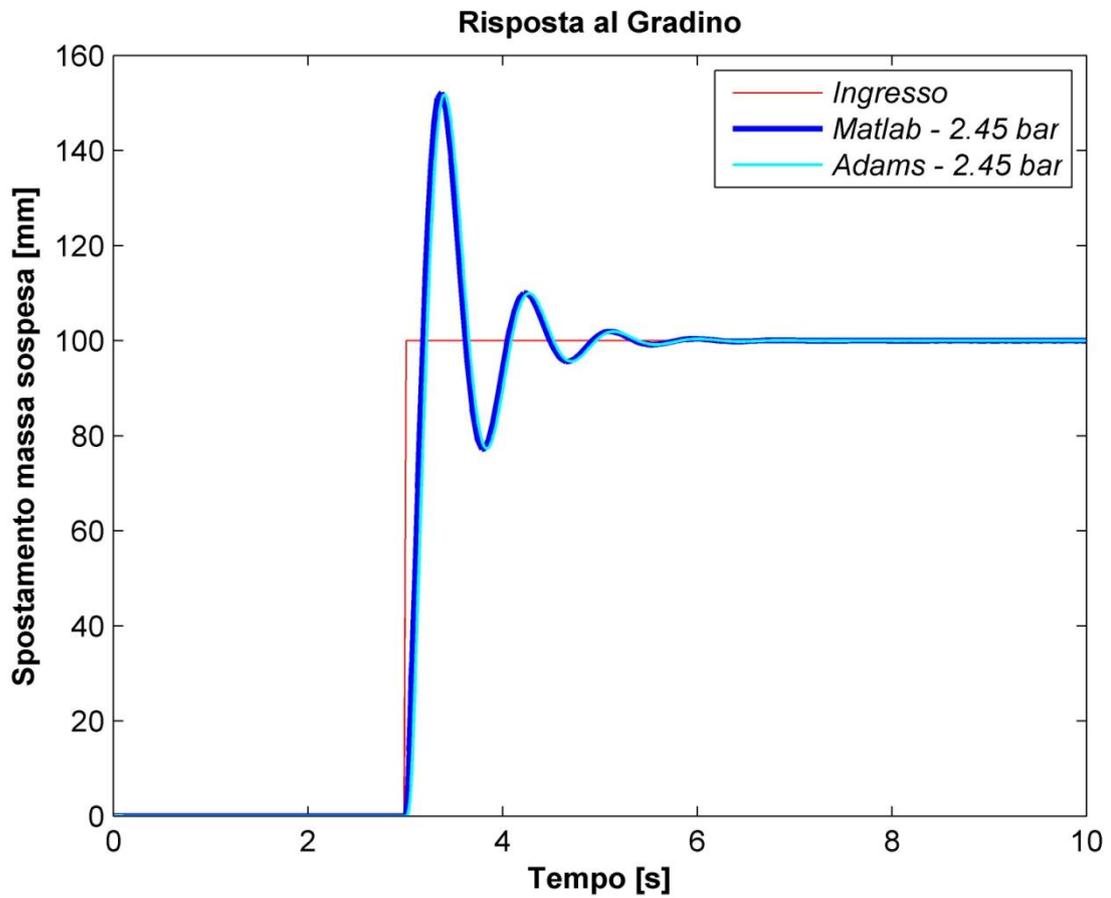
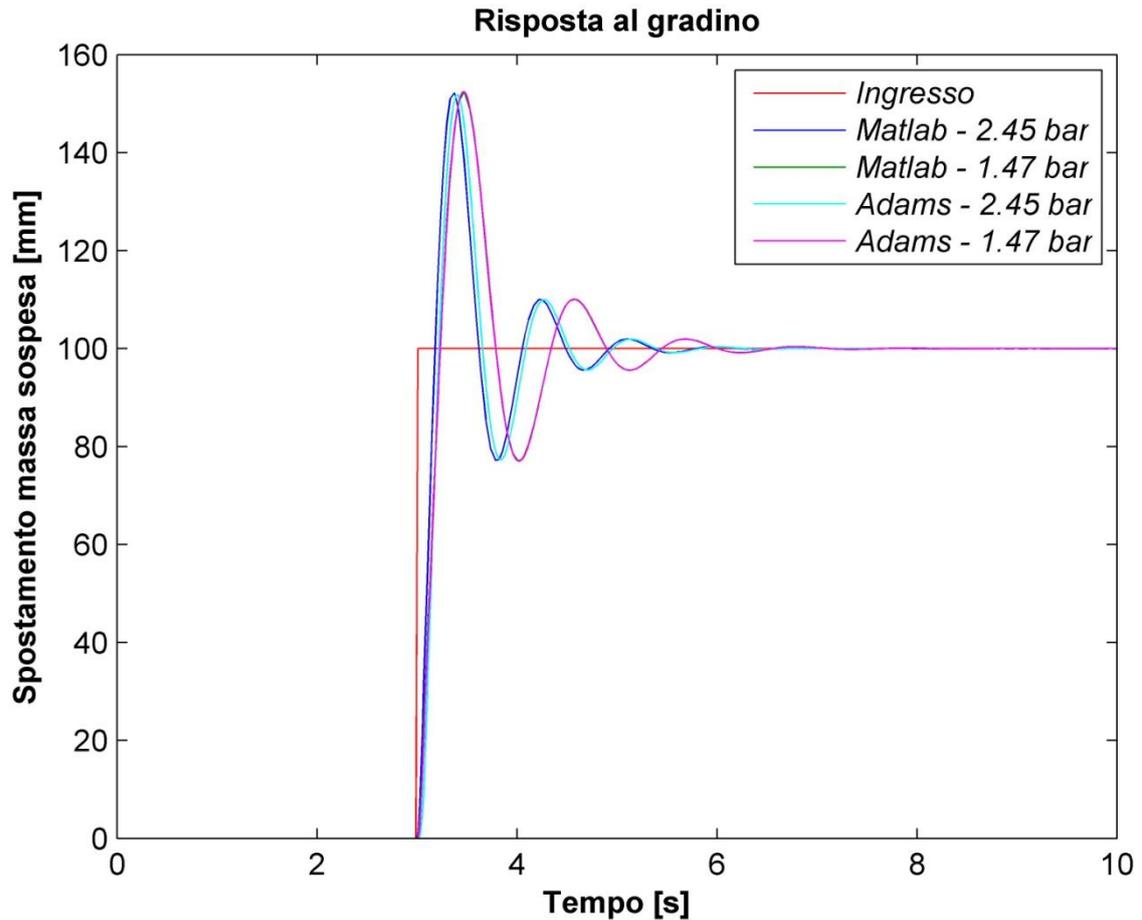


Figura 73: Confronto MATLAB – MSC ADAMS quando il sistema è sollecitato da un ingresso a gradino.



**Figura 74:** Confronto MATLAB – MSC ADAMS quando il sistema è sollecitato da un ingresso a gradino.

Dalla figura si evince che i risultati ottenuti in MSC ADAMS si sovrappongono abbastanza bene con quelli ottenuti in MATLAB. Questo implica, ancora una volta, che i due modelli analizzati sono confrontabili e che i risultati ottenuti nel modello analitico sono attendibili.

### 3.8 Comportamento della massa sospesa con un profilo stradale di tipo Plank

#### Ambiente MATLAB

Facendo sempre riferimento al modello di Figura 5 e alla Tabella 5, il segnale di ingresso di tipo Plank può essere rappresentato dalla seguente funzione:

$$signal = k \cdot (heaviside \cdot (t - t_1) + heaviside \cdot (t - t_2) - 1) \quad (30)$$

dove

- $k$  è l'ampiezza del segnale;
- $heaviside$  è la funzione che determina il gradino in MATLAB, dove in questi caso si vanno a sommare due gradini uno opposto all'altro per ottenere il segnale di ingresso;
- $t$  è il tempo di simulazione;
- $t_1$  è il tempo in cui il segnale passa da un'ampiezza pari a 0 a  $k$ ;
- $t_2$  è il tempo in cui il segnale passa dall'ampiezza  $k$  a 0.

Supponendo di considerare un'ampiezza  $k = 30$  mm, un tempo di simulazione  $t = 10$  s con un passo di integrazione pari a 0.01, un tempo  $t_1 = 2$  s e  $t_2 = 6$  s, il segnale di ingresso può essere rappresentato dalla seguente figura:

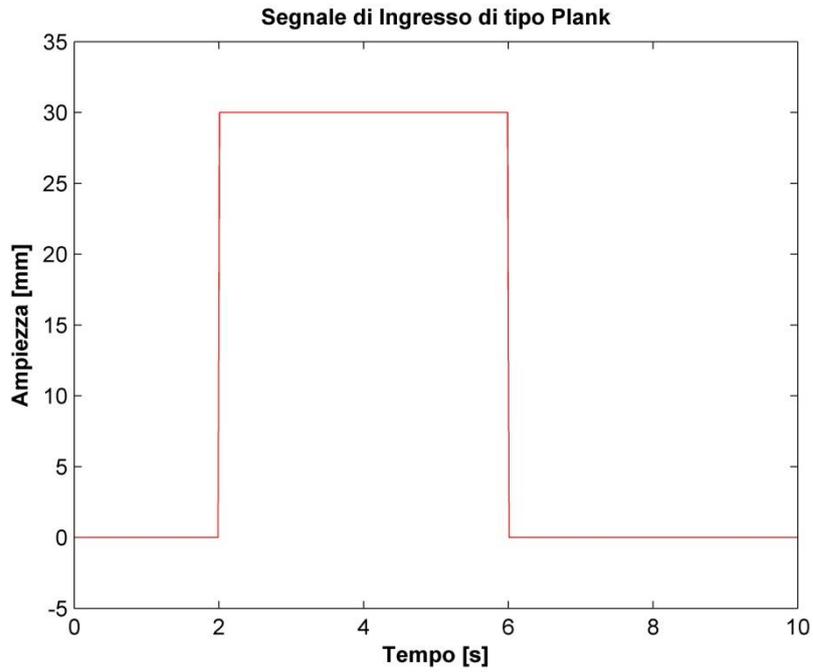


Figura 75: Segnale di ingresso di tipo Plank al sistema.

Sollecitando il sistema con questa tipologia di ingresso, variando anche la pressione di gonfiaggio, si ottengono le seguenti risposte relative allo spostamento della massa sospesa:

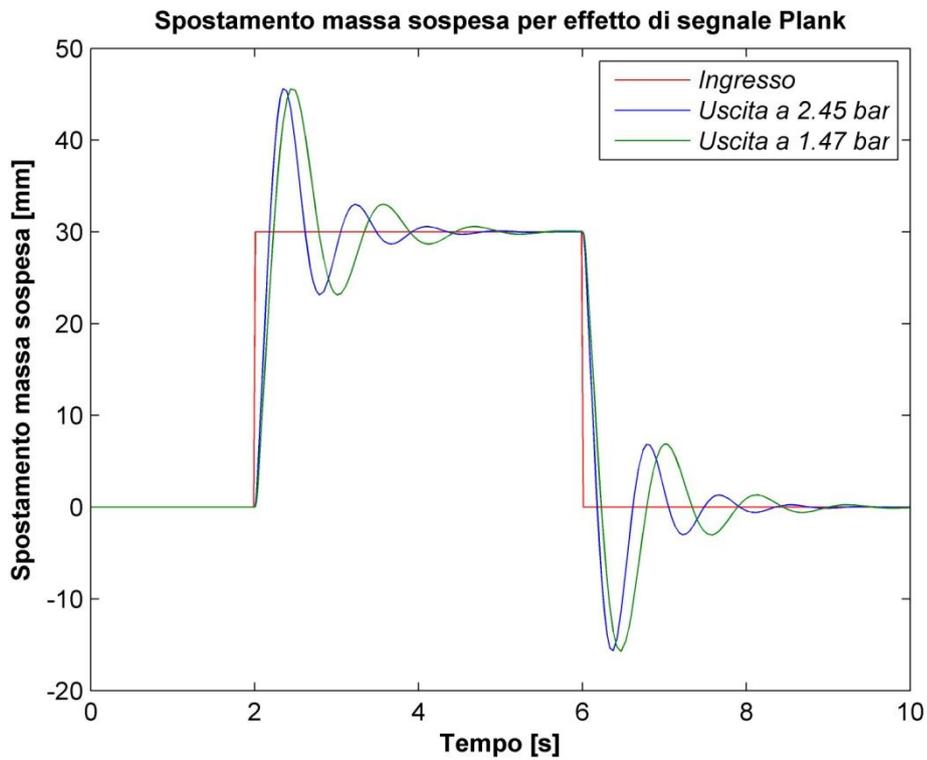


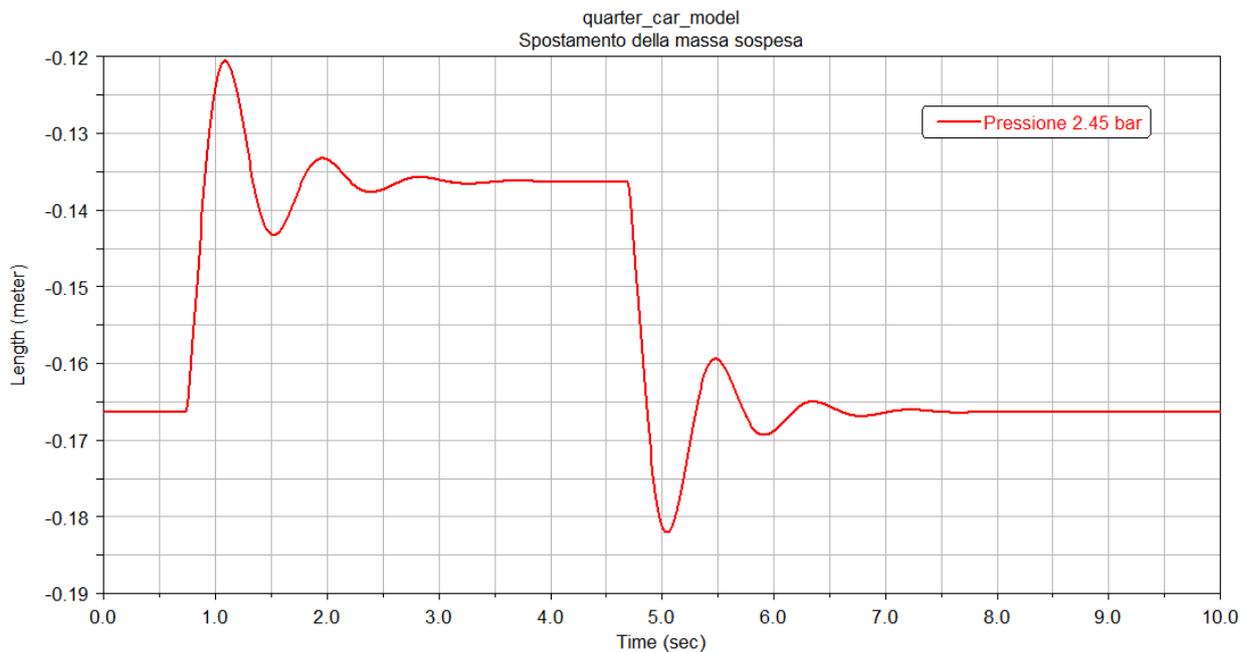
Figura 76: Risposta del sistema al variare della pressione per effetto di un segnale Plank in ingresso.

Analogamente alla risposta a gradino del sistema, lo spostamento della massa sospesa per effetto di un segnale di tipo plank al variare della pressione, presenta una completa traslazione nel tempo.

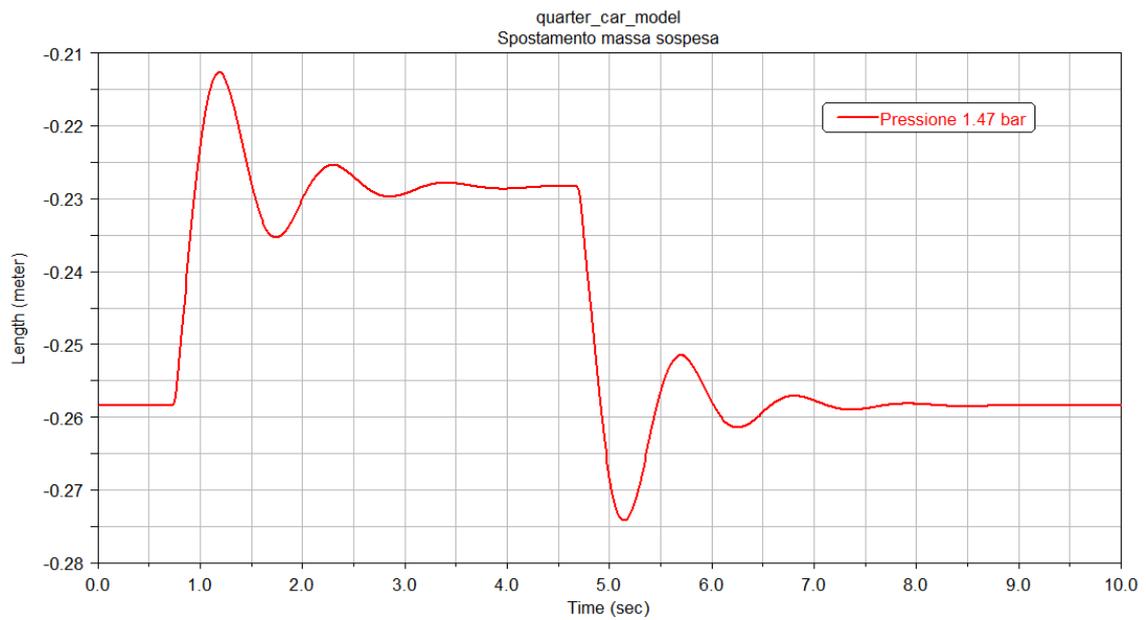
Ovviamente per ottenere la risposta a gradino del sistema bisogna considerare il caso 3 del file "Piusegnali" riportato nell'Appendice C.

### **Ambiente MSC ADAMS**

In questo caso per ottenere lo stesso segnale di Figura 75 in ingresso al modello, il passo di tale segnale dovrà essere pari a 5480 mm, supponendo che il modello viaggi a 5 km/h e che l'ampiezza del segnale in ingresso sia pari a 30 mm. Si ottengono in questo modo le due risposte del sistema rappresentate nelle due seguenti figure:



**Figura 77:** Risposta del sistema per un segnale di tipo Plank alla pressione di 2.45 bar.



**Figura 78:** Risposta del sistema per un segnale di tipo Plank alla pressione di 1.47 bar.

La Figura 79 e Figura 80 mostra il confronto tra i risultati ottenuti in MSC ADAMS (normalizzati) e quelli ottenuti in MATLAB al variare della pressione di gonfiaggio dello pneumatico, quando il sistema è sollecitato da un ingresso di tipo Plank.

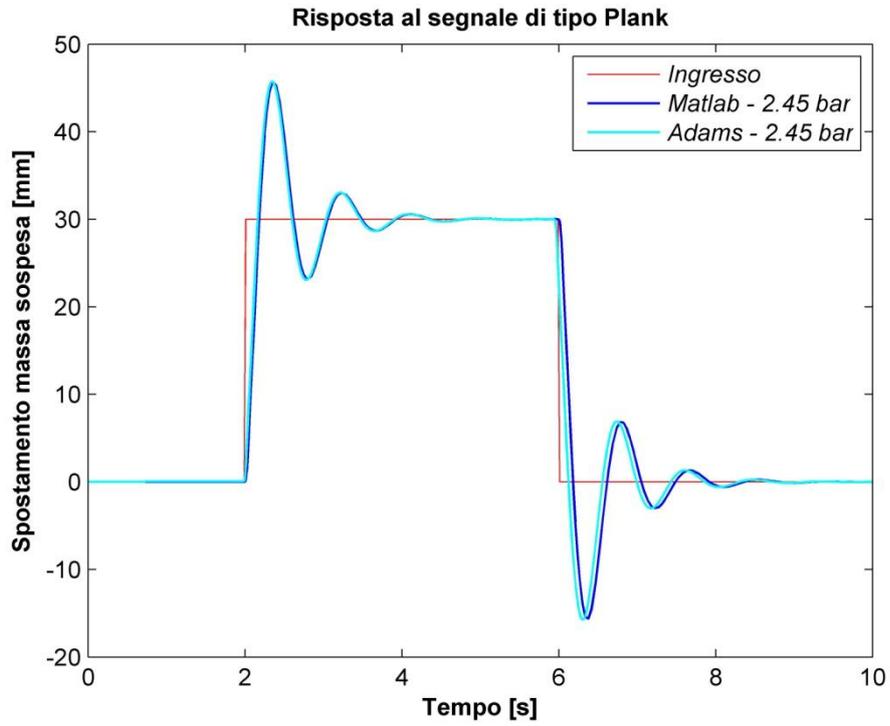


Figura 79: Confronto MATLAB – MSC ADAMS quando il sistema è sollecitato da un ingresso a Plank.

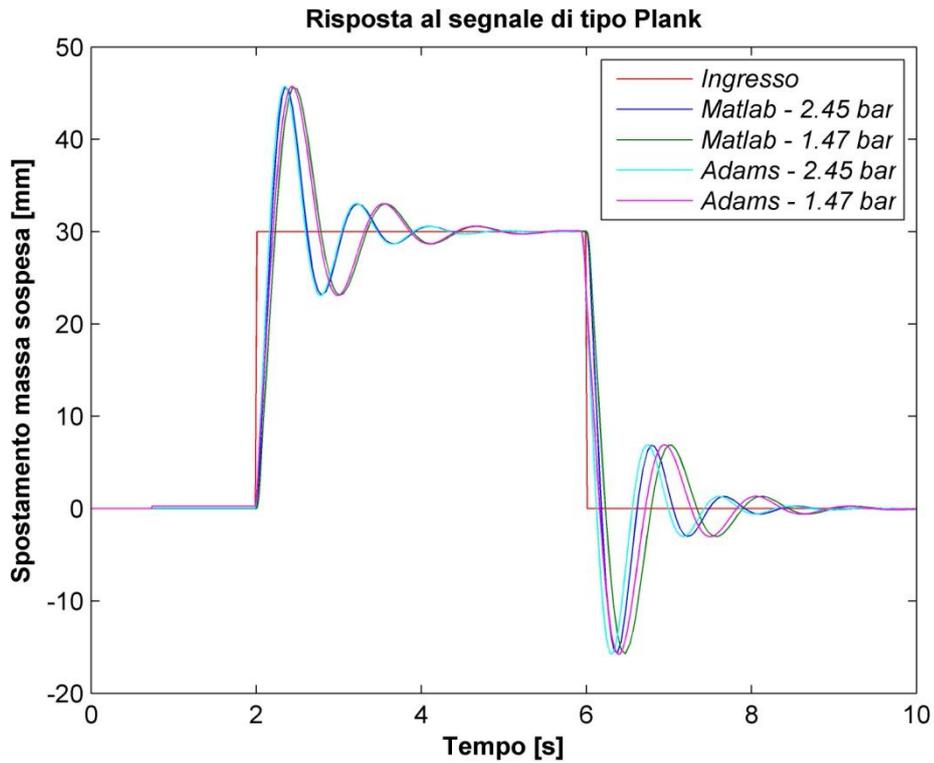


Figura 80: Confronto MATLAB – MSC ADAMS quando il sistema è sollecitato da un ingresso a Plank.

Dalla figura si evince che i risultati ottenuti in MSC ADAMS si sovrappongono abbastanza bene con quelli ottenuti in MATLAB. Questo implica, ancora una volta, che i due modelli analizzati sono confrontabili e che i risultati ottenuti nel modello analitico sono attendibili.

### 3.9 Comportamento massa sospesa con un profilo stradale di tipo Roof

#### Ambiente MATLAB

Per sollecitare il sistema con un profilo stradale di tipo Roof (dosso), si può considerare lo stesso ingresso di tipo Plank della Figura 75, diminuendo notevolmente la sua durata. La Figura 81 mostra il segnale in ingresso al sistema avente un'ampiezza di 30 mm ed un passo di 0.5 s.

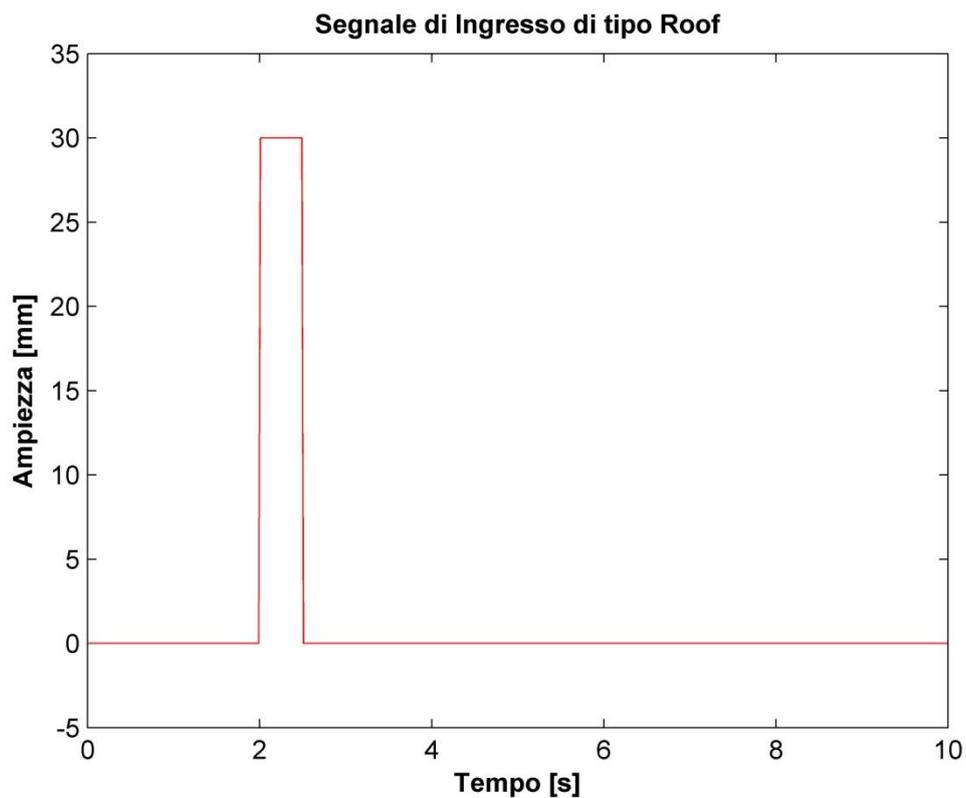


Figura 81: Segnale in ingresso di tipo Roof.

Sollecitando il sistema con tale ingresso e variando anche la pressione di gonfiaggio, si ottengono le seguenti risposte relative allo spostamento della massa sospesa:

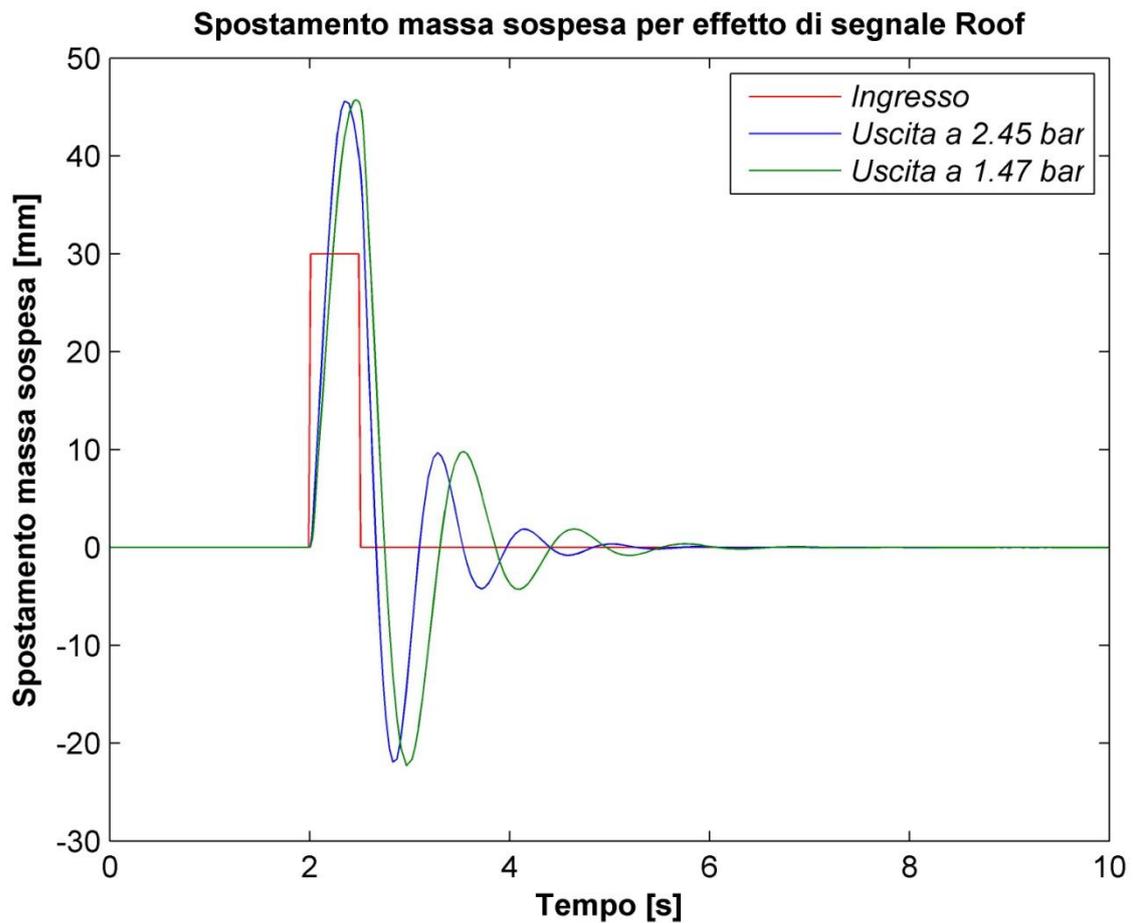


Figura 82: Risposta del sistema al variare della pressione per effetto di un segnale Roof in ingresso.

Analogamente agli altri casi, lo spostamento della massa sospesa in uscita del sistema presenta una completa traslazione nel tempo.

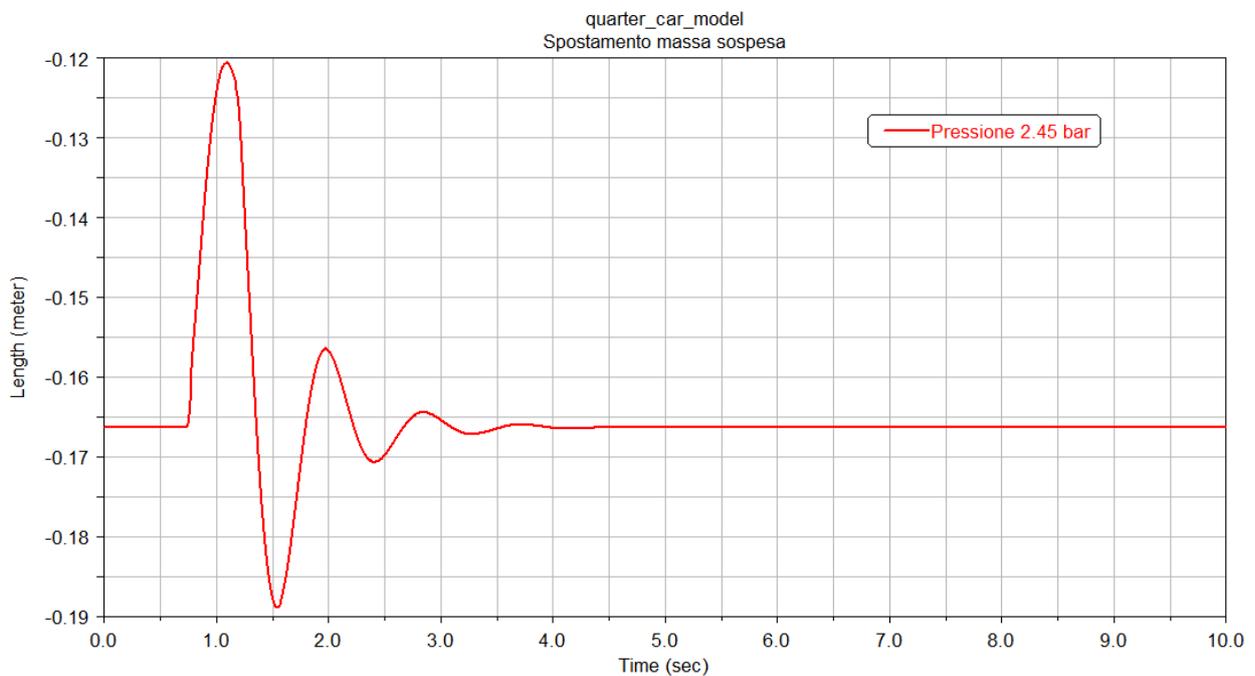
Ovviamente per ottenere la risposta a gradino del sistema bisogna considerare il caso 3 o il caso 2 del file "Piusegnali" riportato nell'Appendice C diminuendo  $T_2$ .

### Ambiente MSC ADAMS

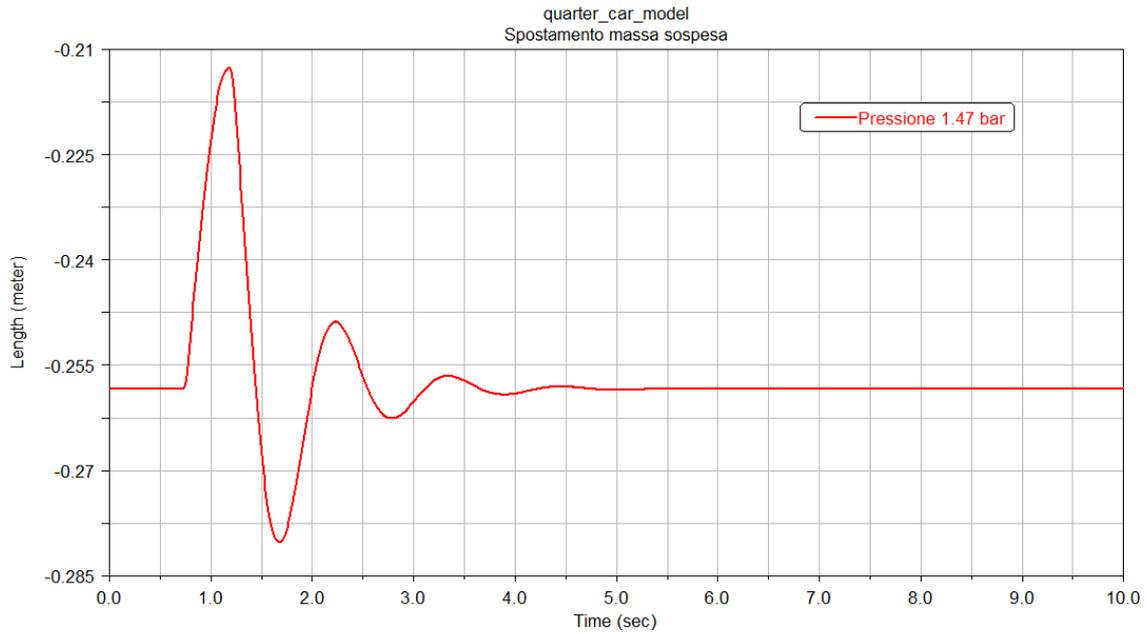
Allo stesso modo si analizza in MSC ADAMS lo spostamento della massa sospesa di  $\frac{1}{4}$  di veicolo avendo in ingresso al sistema un profilo stradale di tipo Roof, considerando diverse condizioni di funzionamento.

Per ottenere in ingresso lo stesso segnale di tipo Roof utilizzato in MATLAB, esso deve avere un passo di 632.5 mm, un'ampiezza di 30 mm e la velocità di avanzamento del veicolo pari a 5 km/h.

La risposta del sistema, al variare della pressione, viene rappresentata nelle seguenti figure:



**Figura 83:** Risposta del sistema per un segnale di tipo Roof alla pressione di 2.45 bar.



**Figura 84:** Risposta del sistema per un segnale di tipo Roof alla pressione di 1.47 bar.

La Figura 85 e Figura 86 mostra il confronto tra i risultati ottenuti in MSC ADAMS (normalizzati) e quelli ottenuti in MATLAB al variare della pressione di gonfiaggio dello pneumatico, quando il sistema è sollecitato da un ingresso di tipo Roof.

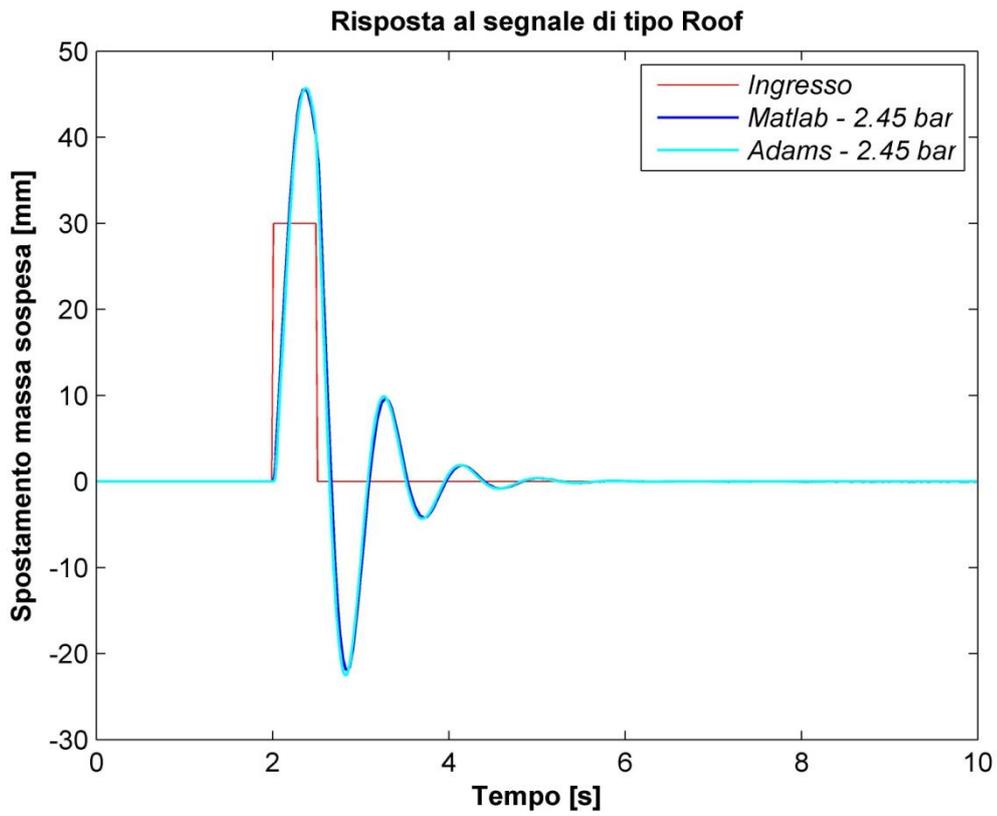


Figura 85: Confronto MATLAB – MSC ADAMS quando il sistema è sollecitato da un ingresso di tipo Roof.

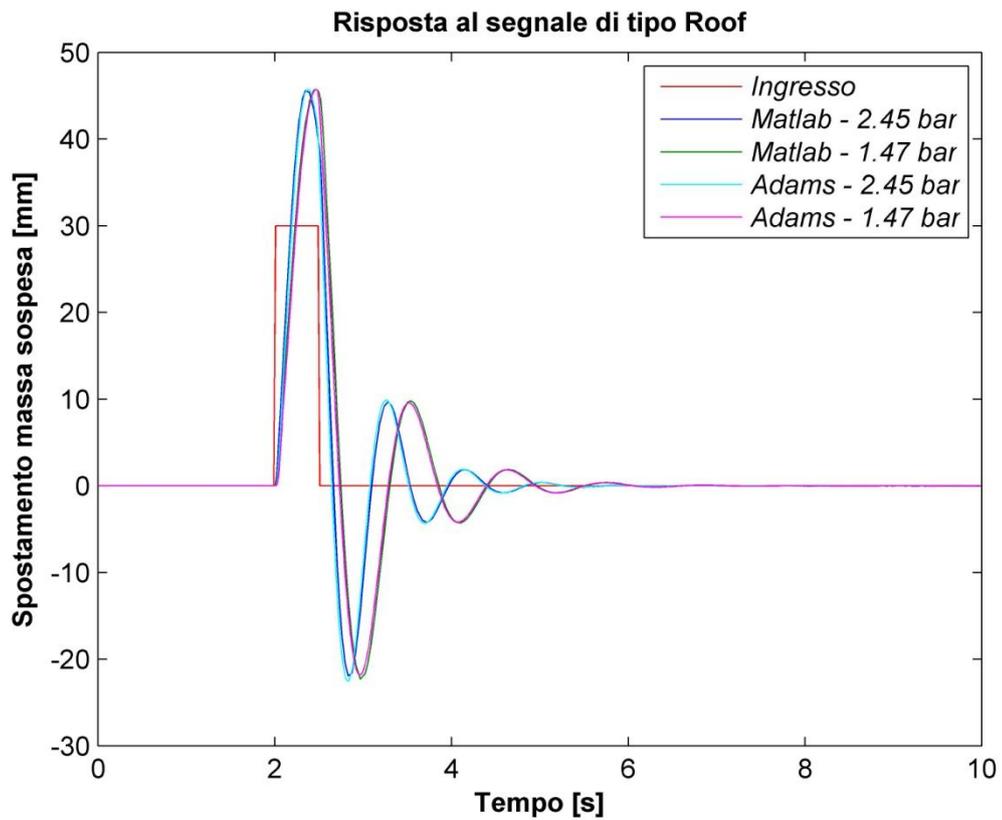


Figura 86: Confronto MATLAB – MSC ADAMS quando il sistema è sollecitato da un ingresso di tipo Roof.

Dalla figura si evince che, ancora una volta, i risultati ottenuti in MSC ADAMS si sovrappongono abbastanza bene con quelli ottenuti in MATLAB. Questo implica che i due modelli analizzati sono confrontabili e che i risultati ottenuti nel modello analitico sono attendibili.

## 4. Conclusioni

Il moto verticale di un veicolo causato dall'irregolarità della strada e dalle caratteristiche del pacchetto sospensione-pneumatico è un fattore importante nel progetto di un veicolo per valutarne le prestazioni in termini di comfort e tenuta di strada.

La presente attività di tesi di laurea si è posta l'obiettivo di studiare la dinamica verticale di un generico veicolo stradale attraverso l'analisi del modello di  $\frac{1}{4}$  di veicolo a due gradi di libertà, il quale rappresenta un buon compromesso tra semplicità e accuratezza.

L'analisi in frequenza del modello, eseguita nei due ambienti di lavoro MATLAB e MSC ADAMS, ha evidenziato come il comportamento verticale del veicolo, rappresentato dallo spostamento della massa sospesa, la corsa della sospensione e lo spostamento verticale dello pneumatico rispetto al profilo stradale, è influenzato dalla variazione del rapporto tra la massa non sospesa e quella sospesa, del rapporto tra la rigidità del sistema pneumatico-ruota e la rigidità della sospensione, del rapporto del coefficiente di smorzamento del sistema sospensivo e della pressione di gonfiaggio degli pneumatici in un range di frequenza di eccitazione che va 0.25 a 20 Hz. Al di sotto di questo valore il comportamento del veicolo è indipendente da tali fattori per cui non fa altro che seguire le naturali variazioni di pendenza della strada. D'altronde, le prestazioni in termini di comfort e di tenuta di strada del veicolo di tipo "passeggero" migliorano con un rapporto delle masse relativamente basso (0.05-0.1), mentre per quanto concerne il sistema sospensivo occorrerebbe un giusto compromesso tra sospensione morbida e rigida con un rapporto di rigidità pari a 7-8 e un coefficiente di smorzamento pari a 0.3. Infine uno pneumatico gonfio garantisce un buon compromesso tra comfort, tenuta di strada e usura, oltre ad un minor consumo di carburante del veicolo.

Per quanto riguarda il confronto delle analisi nei due ambienti di lavoro, si è potuto osservare un ottimo accordo tra i risultati ottenuti. Questo implica che i due modelli a due gradi di libertà

analizzati sono fortemente paragonabili per cui l'ambiente di simulazione MSC ADAMS risulta essere un ottimo banco di prova per studiare il comportamento del veicolo stradale.

Al fine di avere un maggiore riscontro con i risultati ottenuti e di avere uno studio più esaustivo del comportamento verticale dell'intero veicolo, sarebbe utile effettuare delle prove sperimentali, montando a bordo un sistema di acquisizione dati in grado di acquisire, attraverso degli opportuni accelerometri, le accelerazioni degli pneumatici e della struttura del veicolo stesso. In questo modo sarebbe possibile adottare delle strategie di controllo in grado di rendere il veicolo più confortevole o più performante, intervenendo sia sulla pressione dello pneumatico che sul sistema sospensivo.

## 5. Bibliografia

- [1] J. Y. Wong, Ph.D., D.Sc., F.I.Mech.E., F.A.S.M.E., "Theory of Ground Vehicles".
- [2] "Ride and Vibration Data Manual J6a" of the Society of Automotive Engineers.
- [3] Katu U.S, Desavale R.G. and Kanai R.A., "Effect of Vehicle Vibration on Human Body".
- [4] M.J. Griffin, "Handbook of Human Vibration", United States Edition publish by ACADEMIC PRESS INC.
- [5] Massimo Guiggiani, "The Science Of Vehicle Dynamics", Handling, Braking, and Ride of Road and Race Cars.
- [6] Thomas G. Gillespie, "Fundamentals of Vehicle Dynamics", Published by Society of Automotive Engineers, Inc. 400 Commonwealth Drive Warrendale.
- [7] Rajesh Rajamani, "Vehicle Dynamics and Controls".
- [8] Mike Blundell and Damian Harty, "The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics".
- [9] Heinemann – Butterworth Pacejka, 2006, "Tyre and Vehicle Dynamics".
- [10] The PAC2002 Magic-Formula developed by MSC.Software according to Tyre and Vehicle Dynamics by Pacejka.

## 6. Appendice A

### 6.1 *Vibration isolation al variare del rapporto delle masse con e senza smorzamento dello pneumatico*

```
close all
clear all
clc

% trasmissibilità considerando la funzione di trasferimento e in funzione
% del rapporto masse

Ms2 = 454.5; % Sprung Mass [kg];
Ktr2 = 221*1000; % Coefficiente di rigidità dello pneumatico [N/m]; alla
inflation pressure tire di 245kPa = 2,45 bar;
rapp_stiff2 = 8; % rapporto rigidità;
zita_Ms2 = 0.3; % coefficiente di smorzamento della sospensione;

Ks2 = Ktr2/rapp_stiff2; % coefficiente di rigidità della sospensione [N/m];
rapp_masse2 = [0.05 0.10 0.20]; % rapporto masse;

Mus2 = Ms2.*rapp_masse2; % Unsprung Mass [kg];
Ct2a = 0; % coefficiente di smorzamento dello pneumatico [N*s/m];
Ct2b = 2.79*1000; % Damping coefficient [N*s/m] pressione di 245 kPa circa
(2,45 bar);
Csh2 = zita_Ms2*2*(sqrt(Ks2*Ms2));

disp('natural frequency of Sprung Mass [Hz]:')
fn_Ms2 = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks2*Ktr2)/(Ks2+Ktr2))/Ms2)
disp('natural circular frequency of Sprung Mass [rad/s]:')
wn_Ms2 = 2*pi*fn_Ms2

disp('natural frequency of Unsprung Mass [Hz]:')
fn_Mus2 = ((1/(2*pi)).*(sqrt((Ks2+Ktr2)./Mus2))) % ogni vettore colonna
rappresenta la frequenza naturale della Mus2 relativa ad un solo rapporto
masse;
disp('natural circular frequency of Unsprung Mass [rad/s]:')
wn_Mus2 = (2*pi.*fn_Mus2) % ogni vettore colonna
rappresenta la pulsazione naturale della Mus2 relativa ad un solo rapporto
masse;

% Funzione di trasferimento;

num_1a = [Csh2*Ct2a Csh2*Ktr2+Ct2a*Ks2 Ks2*Ktr2];
den_1a = [Ms2*Mus2(1,1) Ms2*Csh2+Ms2*Ct2a+Csh2*Mus2(1,1)
Ms2*Ks2+Ms2*Ktr2+Csh2*Ct2a+Ks2*Mus2(1,1) Csh2*Ktr2+Ks2*Ct2a Ks2*Ktr2];
num_1b = [Csh2*Ct2a Csh2*Ktr2+Ct2a*Ks2 Ks2*Ktr2];
den_1b = [Ms2*Mus2(1,2) Ms2*Csh2+Ms2*Ct2a+Csh2*Mus2(1,2)
Ms2*Ks2+Ms2*Ktr2+Csh2*Ct2a+Ks2*Mus2(1,2) Csh2*Ktr2+Ks2*Ct2a Ks2*Ktr2];
num_1c = [Csh2*Ct2a Csh2*Ktr2+Ct2a*Ks2 Ks2*Ktr2];
den_1c = [Ms2*Mus2(1,3) Ms2*Csh2+Ms2*Ct2a+Csh2*Mus2(1,3)
Ms2*Ks2+Ms2*Ktr2+Csh2*Ct2a+Ks2*Mus2(1,3) Csh2*Ktr2+Ks2*Ct2a Ks2*Ktr2];

num_1d = [Csh2*Ct2b Csh2*Ktr2+Ct2b*Ks2 Ks2*Ktr2];
```

```

den_1d = [Ms2*Mus2(1,1) Ms2*Csh2+Ms2*Ct2b+Csh2*Mus2(1,1)
Ms2*Ks2+Ms2*Ktr2+Csh2*Ct2b+Ks2*Mus2(1,1) Csh2*Ktr2+Ks2*Ct2b Ks2*Ktr2];
num_1e = [Csh2*Ct2b Csh2*Ktr2+Ct2b*Ks2 Ks2*Ktr2];
den_1e = [Ms2*Mus2(1,2) Ms2*Csh2+Ms2*Ct2b+Csh2*Mus2(1,2)
Ms2*Ks2+Ms2*Ktr2+Csh2*Ct2b+Ks2*Mus2(1,2) Csh2*Ktr2+Ks2*Ct2b Ks2*Ktr2];
num_1f = [Csh2*Ct2b Csh2*Ktr2+Ct2b*Ks2 Ks2*Ktr2];
den_1f = [Ms2*Mus2(1,3) Ms2*Csh2+Ms2*Ct2b+Csh2*Mus2(1,3)
Ms2*Ks2+Ms2*Ktr2+Csh2*Ct2b+Ks2*Mus2(1,3) Csh2*Ktr2+Ks2*Ct2b Ks2*Ktr2];

figure(1)
G_1a = tf(num_1a,den_1a);
bodemag(G_1a)
hold on
G_1b = tf(num_1b,den_1b);
bodemag(G_1b);
hold on
G_1c = tf(num_1c,den_1c);
bodemag(G_1c);
hold on
ylabel('Trasmissibility ratio [Z1/Z0]');
title('Trasmissibilità al variare del rapporto masse','FontWeight','Bold');
legend({'\itMus/Ms = 0.05\rm','\itMus/Ms = 0.1\rm','\itMus/Ms = 0.2\rm',});

% Transfer Function
figure(2)
G_1a = tf(num_1a,den_1a);
bodemag(G_1a)
hold on
G_1b = tf(num_1b,den_1b);
bodemag(G_1b);
hold on
G_1c = tf(num_1c,den_1c);
bodemag(G_1c);
hold on
G_1d = tf(num_1d,den_1d);
bodemag(G_1d);
hold on
G_1e = tf(num_1e,den_1e);
bodemag(G_1e);
hold on
G_1f = tf(num_1f,den_1f);
bodemag(G_1f);
ylabel('Trasmissibility ratio [Z1/Z0]');
title('Trasmissibilità al variare del rapporto masse','FontWeight','Bold');
legend({'\itMus/Ms = 0.05 e Ct = 0\rm','\itMus/Ms = 0.1 e Ct =
0\rm','\itMus/Ms = 0.2 e Ct = 0\rm','\itMus/Ms = 0.05\rm','\itMus/Ms =
0.1\rm','\itMus/Ms = 0.2'});

```

## 6.2 Vibration isolation al variare del rapporto delle rigidzze con e senza smorzamento dello pneumatico

```

close all
clear all
clc

% trasmissibilità considerando la funzione di trasferimento e in funzione
% del rapporto di rigidzza

Ms3 = 454.5;          % Sprung Mass [kg];
Ktr3 = 221*1000;     % Coefficiente di rigidzza dello pneumatico [N/m]; alla
inflation pressure tire di 245kPa = 2,45 bar;
rapp_masse3 = 0.1;  % rapporto masse;
Mus3 = Ms3*rapp_masse3; % Unsprung Mass [kg];

rapp_stiff3 = [5 8 10]; % rapporto rigidzze;
Ks3 = Ktr3./rapp_stiff3; % coefficiente di rigidzza della sospensione [N/m];
zita_Ms3 = 0.3;        % coefficiente di smorzamento della sospensione;
Ct3a = 0; % coefficiente di smorzamento dello pneumatico [N*s/m];
Ct3b = 2.79*1000; % Damping coefficient of tire [N*s/m] pressione di 245 kPa
circa (2,45 bar);

Csh3(1,:) = zita_Ms3*2.*(sqrt(Ks3.*Ms3)); % Damping coefficient of suspension
[N*s/m];

% Calcolo delle frequenze naturali

fn_Ms3 = zeros(1,length(Ks3));
wn_Ms3 = zeros(1,length(Ks3));
fn_Mus3 = zeros(1,length(Ks3));
wn_Mus3 = zeros(1,length(Ks3));

disp('natural frequency of Sprung Mass [Hz]:')
fn_Ms3 = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks3*Ktr3./(Ks3+Ktr3))/Ms3))
disp('natural circular frequency of Sprung Mass [rad/s]:')
wn_Ms3 = 2*pi*fn_Ms3

disp('natural frequency of Unsprung Mass [Hz]:')
fn_Mus3 = ((1/(2*pi))*(sqrt((Ks3+Ktr3)./Mus3))) % ogni vettore colonna
rappresenta la frequenza naturale della Mus3 relativa ad un solo rapporto
rigidzze;
disp('natural circular frequency of Unsprung Mass [rad/s]:')
wn_Mus3 = (2*pi.*fn_Mus3) % ogni vettore colonna
rappresenta la pulsazione naturale della Mus3 relativa ad un solo rapporto
rigidzze;

% Funzione di trasferimento;

num_2a = [Csh3(1,1)*Ct3a Csh3(1,1)*Ktr3+Ct3a*Ks3(1,1) Ks3(1,1)*Ktr3];
den_2a = [Ms3*Mus3 Ms3*Csh3(1,1)+Ms3*Ct3a+Csh3(1,1)*Mus3
Ms3*Ks3(1,1)+Ms3*Ktr3+Csh3(1,1)*Ct3a+Ks3(1,1)*Mus3
Csh3(1,1)*Ktr3+Ks3(1,1)*Ct3a Ks3(1,1)*Ktr3];
num_2b = [Csh3(1,2)*Ct3a Csh3(1,2)*Ktr3+Ct3a*Ks3(1,2) Ks3(1,2)*Ktr3];

```

```

den_2b = [Ms3*Mus3 Ms3*Csh3(1,2)+Ms3*Ct3a+Csh3(1,2)*Mus3
Ms3*Ks3(1,2)+Ms3*Ktr3+Csh3(1,2)*Ct3a+Ks3(1,2)*Mus3
Csh3(1,2)*Ktr3+Ks3(1,2)*Ct3a Ks3(1,2)*Ktr3];
num_2c = [Csh3(1,3)*Ct3a Csh3(1,3)*Ktr3+Ct3a*Ks3(1,3) Ks3(1,3)*Ktr3];
den_2c = [Ms3*Mus3 Ms3*Csh3(1,3)+Ms3*Ct3a+Csh3(1,3)*Mus3
Ms3*Ks3(1,3)+Ms3*Ktr3+Csh3(1,3)*Ct3a+Ks3(1,3)*Mus3
Csh3(1,3)*Ktr3+Ks3(1,3)*Ct3a Ks3(1,3)*Ktr3];

num_2d = [Csh3(1,1)*Ct3b Csh3(1,1)*Ktr3+Ct3b*Ks3(1,1) Ks3(1,1)*Ktr3];
den_2d = [Ms3*Mus3 Ms3*Csh3(1,1)+Ms3*Ct3b+Csh3(1,1)*Mus3
Ms3*Ks3(1,1)+Ms3*Ktr3+Csh3(1,1)*Ct3b+Ks3(1,1)*Mus3
Csh3(1,1)*Ktr3+Ks3(1,1)*Ct3b Ks3(1,1)*Ktr3];
num_2e = [Csh3(1,2)*Ct3b Csh3(1,2)*Ktr3+Ct3b*Ks3(1,2) Ks3(1,2)*Ktr3];
den_2e = [Ms3*Mus3 Ms3*Csh3(1,2)+Ms3*Ct3b+Csh3(1,2)*Mus3
Ms3*Ks3(1,2)+Ms3*Ktr3+Csh3(1,2)*Ct3b+Ks3(1,2)*Mus3
Csh3(1,2)*Ktr3+Ks3(1,2)*Ct3b Ks3(1,2)*Ktr3];
num_2f = [Csh3(1,3)*Ct3b Csh3(1,3)*Ktr3+Ct3b*Ks3(1,3) Ks3(1,3)*Ktr3];
den_2f = [Ms3*Mus3 Ms3*Csh3(1,3)+Ms3*Ct3b+Csh3(1,3)*Mus3
Ms3*Ks3(1,3)+Ms3*Ktr3+Csh3(1,3)*Ct3b+Ks3(1,3)*Mus3
Csh3(1,3)*Ktr3+Ks3(1,3)*Ct3b Ks3(1,3)*Ktr3];

```

```

% Transfer Function
figure(1)
G_2a = tf(num_2a,den_2a);
bodemag(G_2a)
hold on
G_2b = tf(num_2b,den_2b);
bodemag(G_2b);
hold on
G_2c = tf(num_2c,den_2c);
bodemag(G_2c);
hold on
ylabel('Trasmissibility ratio [Z1/Z0]');
title('Trasmissibilità al variare del rapporto delle
rigidezze','FontWeight','Bold');
legend({'\itKtr/Ks = 5\rm','\itKtr/Ks = 8\rm','\itKtr/Ks = 10\rm',});

```

```

figure(2)
G_2a = tf(num_2a,den_2a);
bodemag(G_2a)
hold on
G_2b = tf(num_2b,den_2b);
bodemag(G_2b);
hold on
G_2c = tf(num_2c,den_2c);
bodemag(G_2c);
hold on
G_2d = tf(num_2d,den_2d);
bodemag(G_2d);
hold on
G_2e = tf(num_2e,den_2e);
bodemag(G_2e);
hold on
G_2f = tf(num_2f,den_2f);
bodemag(G_2f);
ylabel('Trasmissibility ratio [Z1/Z0]');
title('Trasmissibilità al variare del rapporto di
rigidezza','FontWeight','Bold');

```

```
legend({'\itKtr/Ks = 5 e Ct = 0\rm', '\itKtr/Ks = 8 e Ct = 0\rm', '\itKtr/Ks = 10 e Ct = 0\rm', '\itKtr/Ks = 5\rm', '\itKtr/Ks = 8\rm', '\itKtr/Ks = 10'});
```

### 6.3 Vibration isolation al variare del rapporto di smorzamento del sistema sospensivo con e senza smorzamento dello pneumatico

```
close all
clear all
clc
```

```
% trasmissibilità considerando la funzione di trasferimento e in funzione
% del coefficiente di smorzamento
```

```
Ms4 = 454.5; % Sprung Mass [kg];
Ktr4 = 221*1000; % Coefficiente di rigidezza dello pneumatico [N/m]; alla
inflation pressure tire di 245kPa = 2,45 bar;
rapp_masse4 = 0.1; % rapporto masse;
rapp_stiff4 = 8; % rapporto rigidezze;
Mus4 = Ms4*rapp_masse4; % Unsprung Mass [kg];
Ks4 = Ktr4/rapp_stiff4; % coefficiente di rigidezza della sospensione [N/m];
Ct4a = 0; % coefficiente di smorzamento dello pneumatico [N*s/m];
Ct4b = 2.79*1000; % Damping coefficient of tire [N*s/m] pressione di 245 kPa
circa (2,45 bar);
```

```
zita_Ms4 = [0.1 0.3 0.707]; % coefficiente di smorzamento della sospensione;
```

```
Csh4(1,:) = zita_Ms4.*2*(sqrt(Ks4*Ms4)); % Damping coefficient of suspension
[N*s/m];
```

```
% Calcolo delle frequenze naturali
```

```
% Calcolo delle frequenze naturali
```

```
disp('natural frequency of Sprung Mass [Hz]:')
fn_Ms4 = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks4*Ktr4)/(Ks4+Ktr4))/Ms4)
disp('natural circular frequency of Sprung Mass [rad/s]:')
wn_Ms4 = 2*pi*fn_Ms4
```

```
disp('natural frequency of Unsprung Mass [Hz]:')
fn_Mus4 = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks4+Ktr4)/Mus4))
disp('natural circular frequency of Unsprung Mass [rad/s]:')
wn_Mus4 = 2*pi*fn_Mus4
```

```
% Funzione di trasferimento;
```

```
num_3a = [Csh4(1,1)*Ct4a Csh4(1,1)*Ktr4+Ct4a*Ks4 Ks4*Ktr4];
den_3a = [Ms4*Mus4 Ms4*Csh4(1,1)+Ms4*Ct4a+Csh4(1,1)*Mus4
Ms4*Ks4+Ms4*Ktr4+Csh4(1,1)*Ct4a+Ks4*Mus4 Csh4(1,1)*Ktr4+Ks4*Ct4a Ks4*Ktr4];
num_3b = [Csh4(1,2)*Ct4a Csh4(1,2)*Ktr4+Ct4a*Ks4 Ks4*Ktr4];
den_3b = [Ms4*Mus4 Ms4*Csh4(1,2)+Ms4*Ct4a+Csh4(1,2)*Mus4
Ms4*Ks4+Ms4*Ktr4+Csh4(1,2)*Ct4a+Ks4*Mus4 Csh4(1,2)*Ktr4+Ks4*Ct4a Ks4*Ktr4];
num_3c = [Csh4(1,3)*Ct4a Csh4(1,3)*Ktr4+Ct4a*Ks4 Ks4*Ktr4];
den_3c = [Ms4*Mus4 Ms4*Csh4(1,3)+Ms4*Ct4a+Csh4(1,3)*Mus4
Ms4*Ks4+Ms4*Ktr4+Csh4(1,3)*Ct4a+Ks4*Mus4 Csh4(1,3)*Ktr4+Ks4*Ct4a Ks4*Ktr4];
```

```

num_3d = [Csh4(1,1)*Ct4b Csh4(1,1)*Ktr4+Ct4b*Ks4 Ks4*Ktr4];
den_3d = [Ms4*Mus4 Ms4*Csh4(1,1)+Ms4*Ct4b+Csh4(1,1)*Mus4
Ms4*Ks4+Ms4*Ktr4+Csh4(1,1)*Ct4b+Ks4*Mus4 Csh4(1,1)*Ktr4+Ks4*Ct4b Ks4*Ktr4];
num_3e = [Csh4(1,2)*Ct4b Csh4(1,2)*Ktr4+Ct4b*Ks4 Ks4*Ktr4];
den_3e = [Ms4*Mus4 Ms4*Csh4(1,2)+Ms4*Ct4b+Csh4(1,2)*Mus4
Ms4*Ks4+Ms4*Ktr4+Csh4(1,2)*Ct4b+Ks4*Mus4 Csh4(1,2)*Ktr4+Ks4*Ct4b Ks4*Ktr4];
num_3f = [Csh4(1,3)*Ct4b Csh4(1,3)*Ktr4+Ct4b*Ks4 Ks4*Ktr4];
den_3f = [Ms4*Mus4 Ms4*Csh4(1,3)+Ms4*Ct4b+Csh4(1,3)*Mus4
Ms4*Ks4+Ms4*Ktr4+Csh4(1,3)*Ct4b+Ks4*Mus4 Csh4(1,3)*Ktr4+Ks4*Ct4b Ks4*Ktr4];

```

```

% Transfer Function

```

```

figure(1)
G_3a = tf(num_3a,den_3a);
bodemag(G_3a)
hold on
G_3b = tf(num_3b,den_3b);
bodemag(G_3b);
hold on
G_3c = tf(num_3c,den_3c);
bodemag(G_3c);
hold on
ylabel('Trasmissibility ratio [Z1/Z0]');
title('Trasmissibilità al variare del rapporto di
smorzamento', 'FontWeight', 'Bold');
legend({'\itdamping ratio = 0.1\rm', '\itdamping ratio = 0.3\rm', '\itdamping
ratio = 0.707\rm', });

```

```

figure(2)
G_3a = tf(num_3a,den_3a);
bodemag(G_3a)
hold on
G_3b = tf(num_3b,den_3b);
bodemag(G_3b);
hold on
G_3c = tf(num_3c,den_3c);
bodemag(G_3c);
hold on
G_3d = tf(num_3d,den_3d);
bodemag(G_3d);
hold on
G_3e = tf(num_3e,den_3e);
bodemag(G_3e);
hold on
G_3f = tf(num_3f,den_3f);
bodemag(G_3f);
hold on
ylabel('Trasmissibility ratio [Z1/Z0]');
title('Trasmissibilità al variare del rapporto di
smorzamento', 'FontWeight', 'Bold');
legend({'\itdamping ratio = 0.1 e Ct = 0\rm', '\itdamping ratio = 0.3 e Ct =
0\rm', '\itdamping ratio = 0.707 e Ct = 0\rm', '\itdamping ratio =
0.1\rm', '\itdamping ratio = 0.3\rm', '\itdamping ratio = 0.707' });

```

## 6.4 Vibration isolation al variare della pressione di gonfiaggio con e senza smorzamento dello pneumatico

```

close all
clear all
clc

% trasmissibilità considerando la funzione di trasferimento e in funzione
% della pressione di 1,47 bar e 2,45 bar

Ms1 = 454.5 % Sprung Mass [kg];
Ktr1a = 136*1000 % Coefficiente di rigidità dello pneumatico
[N/m]; alla inflation pressure tire di 147kPa = 1,47 bar;
Ktr1b = 221*1000 % Coefficiente di rigidità dello pneumatico
[N/m]; alla inflation pressure tire di 245kPa = 2,45 bar;
rapp_masse1 = 0.1; % rapporto masse;
Mus1 = Ms1*rapp_masse1 % Unsprung Mass [kg];
rapp_stiff1 = 8; % rapporto rigidità;
Ks1a = Ktr1a/rapp_stiff1 % Coefficiente di rigidità della
sospensione alla pressione di 1.5 bar;
Ks1b = Ktr1b/rapp_stiff1 % Coefficiente di rigidità della
sospensione alla pressione di 2.5 bar;
zita_Ms1 = 0.3 % Coefficiente di smorzamento
della sospensione;
Ct1a = 3.62*1000 % Rapporto di smorzamento dello
pneumatico [N*s/m] alla pressione di 1.47 bar;
Ct1b = 2.79*1000 % Rapporto di smorzamento dello
pneumatico [N*s/m] alla pressione di 2.45 bar;
Ct = 0 % smorzamento pneumatico nullo

Csh1a = zita_Ms1.*(2*sqrt(Ks1a.*Ms1)) % smorzamento del sistema
sospensione-massa del veicolo [N*s/m] alla pressione di 1.5 bar;
Csh1b = zita_Ms1.*(2*sqrt(Ks1b.*Ms1)) % smorzamento del sistema
sospensione-massa del veicolo [N*s/m] alla pressione di 2.5 bar;

disp('natural frequency of Sprung Mass [Hz] alla pressione di 1,47 e 2,45
[bar]:')

fn_Msa1 = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks1a*Ktr1a)/(Ks1a+Ktr1a))/Ms1));
fn_Msb1 = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks1b*Ktr1b)/(Ks1b+Ktr1b))/Ms1));

fn_Ms1a = fn_Msa1
fn_Ms1b = fn_Msb1

disp('natural circular frequency of Sprung Mass [rad/s] alla pressione di
1,47 e 2,45 [bar]:')
wn_Ms1a = 2*pi*fn_Ms1a
wn_Ms1b = 2*pi*fn_Ms1b

disp('natural frequency of Unsprung Mass [Hz] alla pressione di 1,47 e 2,45
[bar]:')

fn_Musa1 = ((1/(2*pi))*(sqrt((Ks1a+Ktr1a)/Mus1)));
fn_Musb1 = ((1/(2*pi))*(sqrt((Ks1b+Ktr1b)/Mus1)));

```

```

fn_Mus1a = fn_Musa1
fn_Mus1b = fn_Musb1

disp('natural circular frequency of Unsprung Mass [rad/s] alla pressione di
1,47 e 2,45 [bar]:')
wn_Mus1a = (2*pi*fn_Mus1a)
wn_Mus2 = (2*pi*fn_Mus1b)

% Funzione di trasferimento

num_1a = [Csh1a*Ct1a Csh1a*Ktr1a+Ct1a*Ks1a Ks1a*Ktr1a];
den_1a = [Ms1*Mus1 Ms1*Csh1a+Ms1*Ct1a+Csh1a*Mus1
Ms1*Ks1a+Ms1*Ktr1a+Csh1a*Ct1a+Ks1a*Mus1 Csh1a*Ktr1a+Ks1a*Ct1a Ks1a*Ktr1a];

num_1b = [Csh1b*Ct1b Csh1b*Ktr1b+Ct1b*Ks1b Ks1b*Ktr1b];
den_1b = [Ms1*Mus1 Ms1*Csh1b+Ms1*Ct1b+Csh1b*Mus1
Ms1*Ks1b+Ms1*Ktr1b+Csh1b*Ct1b+Ks1b*Mus1 Csh1b*Ktr1b+Ks1b*Ct1b Ks1b*Ktr1b];

num_1c = [Csh1a*Ct Csh1a*Ktr1a+Ct*Ks1a Ks1a*Ktr1a];
den_1c = [Ms1*Mus1 Ms1*Csh1a+Ms1*Ct+Csh1a*Mus1
Ms1*Ks1a+Ms1*Ktr1a+Csh1a*Ct+Ks1a*Mus1 Csh1a*Ktr1a+Ks1a*Ct Ks1a*Ktr1a];

num_1d = [Csh1b*Ct Csh1b*Ktr1b+Ct*Ks1b Ks1b*Ktr1b];
den_1d = [Ms1*Mus1 Ms1*Csh1b+Ms1*Ct+Csh1b*Mus1
Ms1*Ks1b+Ms1*Ktr1b+Csh1b*Ct+Ks1b*Mus1 Csh1b*Ktr1b+Ks1b*Ct Ks1b*Ktr1b];

% Transfer Function
figure(1)
G_1c = tf(num_1c,den_1c);
bodemag(G_1c)
hold on
G_1d = tf(num_1d,den_1d);
bodemag(G_1d);
hold on
ylabel('Trasmissibility ratio [Z1/Z0]');
title('Trasmissibilità al variare della pressione dello
pneumatico', 'FontWeight', 'Bold');
legend({'\itpneum. sgonfio a 1,47 bar\rm', '\itpneum. gonfio a 2,45 bar\rm'});

figure(2)
G_1a = tf(num_1a,den_1a);
bodemag(G_1a)
hold on
G_1b = tf(num_1b,den_1b);
bodemag(G_1b);
hold on
G_1c = tf(num_1c,den_1c);
bodemag(G_1c)
hold on
G_1d = tf(num_1d,den_1d);
bodemag(G_1d);
ylabel('Trasmissibility ratio [Z1/Z0]');
title('Trasmissibilità al variare della pressione dello
pneumatico', 'FontWeight', 'Bold');

```

```
legend({'\itpneum. sgonfio a 1,47 bar\rm', '\itpneum. gonfio a 2,45
bar\rm', '\itpneum. sgonfio a 1,47 bar con Ct=0\rm', '\itpneum. gonfio a 2,45
bar con Ct=0\rm'});
```

## 7. Appendice B

### 7.1 *Trasmissibilità in termini di accelerazione al variare del rapporto delle masse*

```
close all
clear all
clc

% trasmissibilità considerando la funzione di trasferimento e in funzione
% del rapporto masse

Ms2 = 454.5; % Sprung Mass [kg];
Ktr2 = 221*1000; % Coefficiente di rigidezza dello pneumatico [N/m]; alla
inflation pressure tire di 250kPa = 2,45 bar;
rapp_stiff2 = 8; % rapporto rigidezze;
zita_Ms2 = 0.3; % coefficiente di smorzamento della sospensione;

Ks2 = Ktr2/rapp_stiff2; % coefficiente di rigidezza della sospensione [N/m];
rapp_masse2 = [0.05 0.10 0.20]; % rapporto masse;

Mus2 = Ms2.*rapp_masse2; % Unsprung Mass [kg];
Ct2a = 0; % coefficiente di smorzamento dello pneumatico [N*s/m];
Ct2b = 2.79*1000; % Damping coefficiente [N*s/m] pressione di 250 kPa circa
(2,45 bar);
Csh2 = zita_Ms2*2*(sqrt(Ks2*Ms2));

disp('natural frequency of Sprung Mass [Hz]:')
fn_Ms2 = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks2*Ktr2)/(Ks2+Ktr2))/Ms2)
disp('natural circular frequency of Sprung Mass [rad/s]:')
wn_Ms2 = 2*pi*fn_Ms2

disp('natural frequency of Unsprung Mass [Hz]:')
fn_Mus2 = ((1/(2*pi)).*(sqrt((Ks2+Ktr2)./Mus2))) % ogni vettore colonna
rappresenta la frequenza naturale della Mus2 relativa ad un solo rapporto
masse;
disp('natural circular frequency of Unsprung Mass [rad/s]:')
wn_Mus2 = (2*pi.*fn_Mus2) % ogni vettore colonna
rappresenta la pulsazione naturale della Mus2 relativa ad un solo rapporto
masse;

% Funzione di trasferimento;

num_2a = [Csh2*Ct2a Csh2*Ktr2+Ct2a*Ks2 Ks2*Ktr2 0 0];
den_2a = [Ms2*Mus2(1,1) Ms2*Csh2+Ms2*Ct2a+Csh2*Mus2(1,1)
Ms2*Ks2+Ms2*Ktr2+Csh2*Ct2a+Ks2*Mus2(1,1) Csh2*Ktr2+Ks2*Ct2a Ks2*Ktr2];
```

```

num_2b = [Csh2*Ct2a Csh2*Ktr2+Ct2a*Ks2 Ks2*Ktr2 0 0];
den_2b = [Ms2*Mus2(1,2) Ms2*Csh2+Ms2*Ct2a+Csh2*Mus2(1,2)
Ms2*Ks2+Ms2*Ktr2+Csh2*Ct2a+Ks2*Mus2(1,2) Csh2*Ktr2+Ks2*Ct2a Ks2*Ktr2];

num_2c = [Csh2*Ct2a Csh2*Ktr2+Ct2a*Ks2 Ks2*Ktr2 0 0];
den_2c = [Ms2*Mus2(1,3) Ms2*Csh2+Ms2*Ct2a+Csh2*Mus2(1,3)
Ms2*Ks2+Ms2*Ktr2+Csh2*Ct2a+Ks2*Mus2(1,3) Csh2*Ktr2+Ks2*Ct2a Ks2*Ktr2];

figure(1)
G_2a = tf(num_2a,den_2a);
bodemag(G_2a)
hold on
G_2b = tf(num_2b,den_2b);
bodemag(G_2b);
hold on
G_2c = tf(num_2c,den_2c);
bodemag(G_2c);
hold on
xlabel('Frequency','FontWeight','Bold')
ylabel('Acceleration (m/s^2)','FontWeight','Bold');
title('Trasmissibilità in termini di accelerazione al variare del rapporto
masse','FontWeight','Bold');
legend({'\itMus/Ms = 0.05\rm','\itMus/Ms = 0.1\rm','\itMus/Ms = 0.2\rm'});

```

## 7.2 Trasmissibilità in termini di accelerazione al variare del rapporto delle rigidzze

```

close all
clear all
clc

% trasmissibilità considerando la funzione di trasferimento e in funzione
% del rapporto di rigidzza

Ms3 = 454.5; % Sprung Mass [kg];
Ktr3 = 221*1000; % Coefficiente di rigidzza dello pneumatico [N/m]; alla
inflation pressure tire di 245kPa = 2,45 bar;
rapp_masse3 = 0.1; % rapporto masse;
Mus3 = Ms3*rapp_masse3; % Unsprung Mass [kg];

rapp_stiff3 = [5 8 10]; % rapporto rigidzze;
Ks3 = Ktr3./rapp_stiff3; % coefficiente di rigidzza della sospensione [N/m];
zita_Ms3 = 0.3; % coefficiente di smorzamento della sospensione;
Ct3a = 0; % coefficiente di smorzamento dello pneumatico [N*s/m];
Ct3b = 2.79*1000; % Damping coefficient of tire [N*s/m] pressione di 245 kPa
circa (2,45 bar);

Csh3(1,:) = zita_Ms3*2.*(sqrt(Ks3.*Ms3)); % Damping coefficient of suspension
[N*s/m];

```

```

% Calcolo delle frequenze naturali

fn_Ms3 = zeros(1,length(Ks3));
wn_Ms3 = zeros(1,length(Ks3));
fn_Mus3 = zeros(1,length(Ks3));
wn_Mus3 = zeros(1,length(Ks3));

disp('natural frequency of Sprung Mass [Hz]:')
fn_Ms3 = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks3*Ktr3./(Ks3+Ktr3))/Ms3))
disp('natural circular frequency of Sprung Mass [rad/s]:')
wn_Ms3 = 2*pi*fn_Ms3

disp('natural frequency of Unsprung Mass [Hz]:')
fn_Mus3 = ((1/(2*pi))*(sqrt((Ks3+Ktr3)./Mus3))) % ogni vettore colonna
rappresenta la frequenza naturale della Mus3 relativa ad un solo rapporto
rigidezze;
disp('natural circular frequency of Unsprung Mass [rad/s]:')
wn_Mus3 = (2*pi.*fn_Mus3) % ogni vettore colonna
rappresenta la pulsazione naturale della Mus3 relativa ad un solo rapporto
rigidezze;

% Funzione di trasferimento;

num_3a = [Csh3(1,1)*Ct3a Csh3(1,1)*Ktr3+Ct3a*Ks3(1,1) Ks3(1,1)*Ktr3 0 0];
den_3a = [Ms3*Mus3 Ms3*Csh3(1,1)+Ms3*Ct3a+Csh3(1,1)*Mus3
Ms3*Ks3(1,1)+Ms3*Ktr3+Csh3(1,1)*Ct3a+Ks3(1,1)*Mus3
Csh3(1,1)*Ktr3+Ks3(1,1)*Ct3a Ks3(1,1)*Ktr3];

num_3b = [Csh3(1,2)*Ct3a Csh3(1,2)*Ktr3+Ct3a*Ks3(1,2) Ks3(1,2)*Ktr3 0 0];
den_3b = [Ms3*Mus3 Ms3*Csh3(1,2)+Ms3*Ct3a+Csh3(1,2)*Mus3
Ms3*Ks3(1,2)+Ms3*Ktr3+Csh3(1,2)*Ct3a+Ks3(1,2)*Mus3
Csh3(1,2)*Ktr3+Ks3(1,2)*Ct3a Ks3(1,2)*Ktr3];

num_3c = [Csh3(1,3)*Ct3a Csh3(1,3)*Ktr3+Ct3a*Ks3(1,3) Ks3(1,3)*Ktr3 0 0];
den_3c = [Ms3*Mus3 Ms3*Csh3(1,3)+Ms3*Ct3a+Csh3(1,3)*Mus3
Ms3*Ks3(1,3)+Ms3*Ktr3+Csh3(1,3)*Ct3a+Ks3(1,3)*Mus3
Csh3(1,3)*Ktr3+Ks3(1,3)*Ct3a Ks3(1,3)*Ktr3];

% Transfer Function

figure(1)
G_3a = tf(num_3a,den_3a);
bodemag(G_3a)
hold on
G_3b = tf(num_3b,den_3b);
bodemag(G_3b);
hold on
G_3c = tf(num_3c,den_3c);
bodemag(G_3c);
hold on
xlabel('Frequency','FontWeight','Bold')
ylabel('Acceleration (m/s^2)','FontWeight','Bold');
title('Trasmissibilità in termini di accelerazione al variare di
rigidezze','FontWeight','Bold');
legend({'\itKtr/Ks = 5\rm','\itKtr/Ks = 8\rm','\itKtr/Ks = 10\rm'});

```

### 7.3 Trasmissibilità in termini di accelerazione al variare dello smorzamento del sistema sospensivo

```
close all
clear all
clc

% trasmissibilità considerando la funzione di trasferimento e in funzione
% del coefficiente di smorzamento

Ms4 = 454.5; % Sprung Mass [kg];
Ktr4 = 221*1000; % Coefficiente di rigidezza dello pneumatico [N/m]; alla
inflation pressure tire di 245kPa = 2,45 bar;
rapp_masse4 = 0.1; % rapporto masse;
rapp_stiff4 = 8; % rapporto rigidezze;
Mus4 = Ms4*rapp_masse4; % Unsprung Mass [kg];
Ks4 = Ktr4/rapp_stiff4; % coefficiente di rigidezza della sospensione [N/m];
Ct4a = 0; % coefficiente di smorzamento dello pneumatico [N*s/m];
Ct4b = 2.79*1000; % Damping coefficient of tire [N*s/m] pressione di 245 kPa
circa (2,45 bar);

zita_Ms4 = [0.1 0.3 0.707]; % coefficiente di smorzamento della sospensione;

Csh4(1,:) = zita_Ms4.*2*(sqrt(Ks4*Ms4)); % Damping coefficient of suspension
[N*s/m];

% Calcolo delle frequenze naturali

% Calcolo delle frequenze naturali

disp('natural frequency of Sprung Mass [Hz]:')
fn_Ms4 = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks4*Ktr4)/(Ks4+Ktr4))/Ms4)
disp('natural circular frequency of Sprung Mass [rad/s]:')
wn_Ms4 = 2*pi*fn_Ms4

disp('natural frequency of Unsprung Mass [Hz]:')
fn_Mus4 = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks4+Ktr4)/Mus4))
disp('natural circular frequency of Unsprung Mass [rad/s]:')
wn_Mus4 = 2*pi*fn_Mus4

% Funzione di trasferimento;

num_4a = [Csh4(1,1)*Ct4a Csh4(1,1)*Ktr4+Ct4a*Ks4 Ks4*Ktr4 0 0];
den_4a = [Ms4*Mus4 Ms4*Csh4(1,1)+Ms4*Ct4a+Csh4(1,1)*Mus4
Ms4*Ks4+Ms4*Ktr4+Csh4(1,1)*Ct4a+Ks4*Mus4 Csh4(1,1)*Ktr4+Ks4*Ct4a Ks4*Ktr4];

num_4b = [Csh4(1,2)*Ct4a Csh4(1,2)*Ktr4+Ct4a*Ks4 Ks4*Ktr4 0 0];
den_4b = [Ms4*Mus4 Ms4*Csh4(1,2)+Ms4*Ct4a+Csh4(1,2)*Mus4
Ms4*Ks4+Ms4*Ktr4+Csh4(1,2)*Ct4a+Ks4*Mus4 Csh4(1,2)*Ktr4+Ks4*Ct4a Ks4*Ktr4];

num_4c = [Csh4(1,3)*Ct4a Csh4(1,3)*Ktr4+Ct4a*Ks4 Ks4*Ktr4 0 0];
den_4c = [Ms4*Mus4 Ms4*Csh4(1,3)+Ms4*Ct4a+Csh4(1,3)*Mus4
Ms4*Ks4+Ms4*Ktr4+Csh4(1,3)*Ct4a+Ks4*Mus4 Csh4(1,3)*Ktr4+Ks4*Ct4a Ks4*Ktr4];
```

```

% Transfer Function

figure(1)
G_4a = tf(num_4a,den_4a);
bodemag(G_4a)
hold on
G_4b = tf(num_4b,den_4b);
bodemag(G_4b);
hold on
G_4c = tf(num_4c,den_4c);
bodemag(G_4c);
hold on
xlabel('Frequency','FontWeight','Bold')
ylabel('Acceleration (m/s^2)','FontWeight','Bold');
title('Trasmissibilità in termini di accelerazione al variare dello
smorzamento','FontWeight','Bold');
legend({'\itdamping ratio = 0.1\rm','\itdamping ratio = 0.3\rm','\itdamping
ratio = 0.707\rm'});

```

#### 7.4 Trasmissibilità in termini di accelerazione al variare della pressione

```

close all
clear all
clc

```

```

% trasmissibilità considerando la funzione di trasferimento e in funzione
% della pressione di 1,5 bar e 2,5 bar

```

```

Ms1 = 454.5 % Sprung Mass [kg];
Ktr1a = 136*1000 % Coefficiente di rigidità dello pneumatico
[N/m]; alla inflaction pressure tire di 147kPa = 1,47 bar;
Ktr1b = 221*1000 % Coefficiente di rigidità dello pneumatico
[N/m]; alla inflaction pressure tire di 245kPa = 2,45 bar;
rapp_massel = 0.1; % rapporto masse;
Mus1 = Ms1*rapp_massel % Unsprung Mass [kg];
rapp_stiff1 = 8; % rapporto rigidità;
Ks1a = Ktr1a/rapp_stiff1 % Coefficiente di rigidità della
sospensione alla pressione di 1.5 bar;
Ks1b = Ktr1b/rapp_stiff1 % Coefficiente di rigidità della
sospensione alla pressione di 2.5 bar;
zita_Ms1 = 0.3 % Coefficiente di smorzamento
della sospensione;
Ct1a = 3.62*1000 % Rapporto di smorzamento dello
pneumatico [N*s/m] alla pressione di 1.47 bar;
Ct1b = 2.79*1000 % Rapporto di smorzamento dello
pneumatico [N*s/m] alla pressione di 2.45 bar;
Ct = 0 % smorzamento pneumatico nullo

Csh1a = zita_Ms1.*(2*sqrt(Ks1a.*Ms1)) % smorzamento del sistema
sospensione-massa del veicolo [N*s/m] alla pressione di 1.5 bar;

```

```

Csh1b = zita_Ms1.*(2*sqrt(Ks1b.*Ms1))           % smorzamento del sistema
sospensione-massa del veicolo [N*s/m] alla pressione di 2.5 bar;

disp('natural frequency of Sprung Mass [Hz] alla pressione di 1,47 e 2,45
[bar]:')

fn_Msa1 = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks1a*Ktr1a)/(Ks1a+Ktr1a))/Ms1));
fn_Msb1 = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks1b*Ktr1b)/(Ks1b+Ktr1b))/Ms1));

fn_Ms1a = fn_Msa1
fn_Ms1b = fn_Msb1

disp('natural circular frequency of Sprung Mass [rad/s] alla pressione di
1,47 e 2,45 [bar]:')
wn_Ms1a = 2*pi*fn_Ms1a
wn_Ms1b = 2*pi*fn_Ms1b

disp('natural frequency of Unsprung Mass [Hz] alla pressione di 1,47 e 2,45
[bar]:')

fn_Musa1 = ((1/(2*pi))*(sqrt((Ks1a+Ktr1a)/Mus1)));
fn_Musb1 = ((1/(2*pi))*(sqrt((Ks1b+Ktr1b)/Mus1)));

fn_Mus1a = fn_Musa1
fn_Mus1b = fn_Musb1

disp('natural circular frequency of Unsprung Mass [rad/s] alla pressione di
1,47 e 2,45 [bar]:')
wn_Mus1a = (2*pi*fn_Mus1a)
wn_Mus2 = (2*pi*fn_Mus1b)

% Funzione di trasferimento

num_4a = [Csh1a*Ct Csh1a*Ktr1a+Ct*Ks1a Ks1a*Ktr1a 0 0];
den_4a = [Ms1*Mus1 Ms1*Csh1a+Ms1*Ct+Csh1a*Mus1
Ms1*Ks1a+Ms1*Ktr1a+Csh1a*Ct+Ks1a*Mus1 Csh1a*Ktr1a+Ks1a*Ct Ks1a*Ktr1a];

num_4b = [Csh1b*Ct Csh1b*Ktr1b+Ct*Ks1b Ks1b*Ktr1b 0 0];
den_4b = [Ms1*Mus1 Ms1*Csh1b+Ms1*Ct+Csh1b*Mus1
Ms1*Ks1b+Ms1*Ktr1b+Csh1b*Ct+Ks1b*Mus1 Csh1b*Ktr1b+Ks1b*Ct Ks1b*Ktr1b];

% Transfer Function

figure(1)
G_4a = tf(num_4a,den_4a);
bodemag(G_4a)
hold on
G_4b = tf(num_4b,den_4b);
bodemag(G_4b);
hold on
xlabel('Frequency','FontWeight','Bold')
ylabel('Acceleration (m/s^2)','FontWeight','Bold');
title('Trasmissibilità in termini di accelerazione al variare della
pressione','FontWeight','Bold');

```

```
legend({'\itpneum. sgonfio a 1,47 bar\rm', '\itpneum. gonfio a 2,45 bar\rm'});
```

## 8. Appendice C

### 8.1 Trasmissibilità con un profilo stradale sinusoidale

```
close all
clear all
clc

% trasmissibilità considerando la funzione di trasferimento e in funzione
% della pressione di 1,5 bar e 2,5 bar;

Ms1 = 454.5 % Sprung Mass [kg];
Ktr1a = 136*1000 % Coefficiente di rigidezza
dello pneumatico [N/m]; alla inflaction pressure tire di 147kPa = 1,47 bar;
Ktr1b = 221*1000 % Coefficiente di rigidezza
dello pneumatico [N/m]; alla inflaction pressure tire di 245kPa = 2,45 bar;
rapp_massel = 0.1; % rapporto masse;
Mus1 = Ms1*rapp_massel % Unsprung Mass [kg];
rapp_stiff1 = 8; % rapporto rigidezza Ktr/Ks;
Ks1a = Ktr1a/rapp_stiff1 % Coefficiente di rigidezza
della sospensione alla pressione di 1.47 bar;
Ks1b = Ktr1b/rapp_stiff1 % Coefficiente di rigidezza
della sospensione alla pressione di 2.45 bar;
zita_Ms1 = 0.3 % Coefficiente di smorzamento
della sospensione;
Ct1a = 3.62*1000 % Rapporto di smorzamento dello
pneumatico [N*s/m] alla pressione di 1.47 bar;
Ct1b = 2.79*1000 % Rapporto di smorzamento dello
pneumatico [N*s/m] alla pressione di 2.45 bar;
Ct = 0;

Csh1a = zita_Ms1*(2*sqrt(Ks1a*Ms1)) % smorzamento del sistema
sospensione-massa del veicolo [N*s/m] alla pressione di 1.47 bar;
Csh1b = zita_Ms1*(2*sqrt(Ks1b*Ms1)) % smorzamento del sistema
sospensione-massa del veicolo [N*s/m] alla pressione di 2.45 bar;

disp('natural frequency of Sprung Mass [Hz] alla pressione di 1,47 [bar] e
alla pressione di 2,45 [bar]:')

fn_Ms1a = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks1a*Ktr1a)/(Ks1a+Ktr1a))/Ms1));
fn_Ms1b = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks1b*Ktr1b)/(Ks1b+Ktr1b))/Ms1));

disp('natural circular frequency of Sprung Mass [rad/s] alla pressione di
1,47 [bar] e alla pressione di 2,45 [bar]:')
wn_Ms1a = 2*pi*fn_Ms1a
wn_Ms1b = 2*pi*fn_Ms1b
```

```

disp('natural frequency of Unsprung Mass [Hz] alla pressione di 1,47 [bar] e
2,45 [bar]:')

fn_Mus1a = ((1/(2*pi))*(sqrt((Ks1a+Ktr1a)/Mus1)));
fn_Mus1b = ((1/(2*pi))*(sqrt((Ks1b+Ktr1b)/Mus1)));

disp('natural circular frequency of Unsprung Mass [rad/s] alla pressione di
1,47 [bar] e alla pressione di 2,45 [bar]:')
wn_Mus1a = (2*pi*fn_Mus1a)
wn_Mus2 = (2*pi*fn_Mus1b)

num_2a = [Csh1b*Ct Csh1b*Ktr1b+Ct*Ks1b Ks1b*Ktr1b];
den_2a = [Ms1*Mus1 Ms1*Csh1b+Ms1*Ct+Csh1b*Mus1
Ms1*Ks1b+Ms1*Ktr1b+Csh1b*Ct+Ks1b*Mus1 Csh1b*Ktr1b+Ks1b*Ct Ks1b*Ktr1b];

%G = tf(num_2a,den_2a);

lw = 3000/1000; % lunghezza d'onda in m
V = 10/3.6; % Velocità di avanzamento del veicolo in m/s;
f = V/lw; %frequenza [Hz]
w = 2*pi*f; % pulsazione [rad/s];
imm = sqrt(-1);
A = 35; %[m]

global signal;
t = [0:0.01:10]'; % Lunghezza della strada [m]
signal = A*sin(w*t);
wave.time = t;
wave.signals.values = signal;
wave.signals.dimensions = 1;
figure;
plot(t,signal,'r');
ylabel('Ampiezza [mm]','FontWeight','Bold');
xlabel('Tempo [s]','FontWeight','Bold');
title('Segnale di tipo sinusoidale in ingresso al
sistema','FontWeight','Bold');
save signal.mat signal

[tempo,stato,uscita] = sim('Sinusoide');
figure;
plot(tempo,uscita)
ylabel('Spostamento massa sospesa [mm]','FontWeight','Bold');
xlabel('Tempo [s]','FontWeight','Bold');
title('Segnale in uscita per effetto di un segnale sinusoidale in
ingresso','FontWeight','Bold');

figure(3)
plot(t,signal,'r')
hold on
plot(tempo,uscita)
ylabel('Spostamento massa sospesa [mm]','FontWeight','Bold');
xlabel('Tempo [s]','FontWeight','Bold')
legend({'\itIngresso\rm','\itUscita a 2.45 bar\rm','\itUscita a 1.47
bar\rm'});
title('Segnale in uscita al variare della pressione di
gonfiaggio','FontWeight','Bold');

```

hold on

## 8.2 Comportamento della massa sospesa con un profilo stradale di tipo Gradino, Plank e Roof

```
close all
clear all
clc

Ms1 = 454.5 % Sprung Mass [kg];
Ktr1a = 136*1000 % Coefficiente di rigidezza
dello pneumatico [N/m]; alla inflaction pressure tire di 147kPa = 1,47 bar;
Ktr1b = 221*1000 % Coefficiente di rigidezza
dello pneumatico [N/m]; alla inflaction pressure tire di 245kPa = 2,45 bar;
rapp_massel = 0.1; % rapporto masse;
Mus1 = Ms1*rapp_massel % Unsprung Mass [kg];
V1 = 5*(1000/3600) % Velocità di avanzamento del
veicolo [m/s];
rapp_stiff1 = 8; % rapporto rigidezza Ktr/Ks;
Ks1a = Ktr1a/rapp_stiff1 % Coefficiente di rigidezza
della sospensione alla pressione di 1.47 bar;
Ks1b = Ktr1b/rapp_stiff1 % Coefficiente di rigidezza
della sospensione alla pressione di 2.45 bar;
zita_Ms1 = 0.3 % Coefficiente di smorzamento
della sospensione;
Ct1a = 3.62*1000 % Rapporto di smorzamento dello
pneumatico [N*s/m] alla pressione di 1.47 bar;
Ct1b = 2.79*1000 % Rapporto di smorzamento dello
pneumatico [N*s/m] alla pressione di 2.45 bar;
Ct = 0;

Csh1a = zita_Ms1*(2*sqrt(Ks1a*Ms1)) % smorzamento del sistema
sospensione-massa del veicolo [N*s/m] alla pressione di 1.47 bar;
Csh1b = zita_Ms1*(2*sqrt(Ks1b*Ms1)) % smorzamento del sistema
sospensione-massa del veicolo [N*s/m] alla pressione di 2.45 bar;

disp('natural frequency of Sprung Mass [Hz] alla pressione di 1,47 [bar] e
alla pressione di 2,45 [bar]:')

fn_Ms1a = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks1a*Ktr1a)/(Ks1a+Ktr1a))/Ms1));
fn_Ms1b = (1/(2*pi))*(sqrt((Ks1b*Ktr1b)/(Ks1b+Ktr1b))/Ms1));

disp('natural circular frequency of Sprung Mass [rad/s] alla pressione di
1,47 [bar] e alla pressione di 2,45 [bar]:')
wn_Ms1a = 2*pi*fn_Ms1a
wn_Ms1b = 2*pi*fn_Ms1b

disp('natural frequency of Unsprung Mass [Hz] alla pressione di 1,47 [bar] e
2,45 [bar]:')

fn_Mus1a = ((1/(2*pi))*(sqrt((Ks1a+Ktr1a)/Mus1)));
```

```

fn_Mus1b = ((1/(2*pi))*(sqrt((Kslb+Ktr1b)/Mus1)));

disp('natural circular frequency of Unsprung Mass [rad/s] alla pressione di
1,47 [bar] e alla pressione di 2,45 [bar]:')
wn_Mus1a = (2*pi*fn_Mus1a)
wn_Mus2 = (2*pi*fn_Mus1b)

num_2a = [Csh1b*Ct Csh1b*Ktr1b+Ct*Kslb Kslb*Ktr1b];
den_2a = [Ms1*Mus1 Ms1*Csh1b+Ms1*Ct+Csh1b*Mus1
Ms1*Kslb+Ms1*Ktr1b+Csh1b*Ct+Kslb*Mus1 Csh1b*Ktr1b+Kslb*Ct Kslb*Ktr1b];

%G = tf(num_2a,den_2a);

caso = 4;

lw = 3000/1000; % lunghezza d'onda in m
V = 10/3.6; % Velocità di avanzamento del veicolo in m/s;
f = V/lw; %frequenza [Hz]
imm = sqrt(-1);
global signal;
t = [0:0.01:10]'; % Lunghezza della strada [m]

if caso==1 % caso sinusoidale;
    A = 0.035; %[m]
    w = 2*pi*f; % pulsazione [rad/s];
    signal = A*sin(w*t);
end

if caso==2 % caso Roof;
    k = 5; % Ampiezza
    s = 100; % pendenza
    T1 = 3; % tempo iniziale
    T2 = 3.5; % tempo finale
    u1 = (erf(s*(t-T1))+1)/2;
    u2 = (erf(s*(-t+T2))+1)/2;
    signal = k*(u1+u2-1);
end

if caso==3 % caso Plank;
    k = 0.03; % Ampiezza
    T1 = 2; % tempo iniziale
    T2 = 6; % tempo finale
    signal = k*(heaviside(t-T1)+heaviside(-t+T2)-1);
end

if caso==4 % caso Gradino;
    k = 100;
    T1 = 3;
    signal = k*(heaviside(t-T1));
end

if caso==5 % caso Rampa;
    k = 2;
    T1 = 3;
    signal = k*(t-T1).*heaviside(t-T1);
end

wave.time = t;

```

```

wave.signals.values = signal;
wave.signals.dimensions = 1;
figure;
plot(t,signal,'r');
ylabel('Ampiezza [mm'],'FontWeight','Bold');
xlabel('Tempo [s]','FontWeight','Bold');
ylim([-1 101]);
title('Segnale di Ingresso a gradino','FontWeight','Bold');
save signal.mat signal

[tempo,stato,uscita] = sim('Signals');
figure;
plot(tempo,uscita)
ylabel('Spostamento massa sospesa [mm]','FontWeight','Bold');
xlabel('Tempo [s]','FontWeight','Bold');
title('Spostamento massa sospesa per effetto di un segnale in
ingresso','FontWeight','Bold');

figure(3)
plot(t,signal,'r')
hold on
plot(tempo,uscita)
ylabel('Spostamento massa sospesa [mm]','FontWeight','Bold');
xlabel('Tempo [s]','FontWeight','Bold');
title('Spostamento massa sospesa per effetto di un
gradino','FontWeight','Bold');
legend({'\itIngresso\rm','\itUscita a 2.45 bar\rm','\itUscita a 1.47
bar\rm'});
hold on

```